

Teorija Mjere i Integracije – Predavanja

Profesor: dr. Zenan Šabanac

autor skripte: Atif D.*

PMF, Sarajevo

2026

Sadržaj

I parcijala	3
1 Predavanje 1	3
1.1 Nedostaci pojma Riemannovog integrala	3
1.2 Mjera na $\mathbb{R}^n$	4
1.3 Vitalijev primjer nemjerljivog skupa	4
1.4 Sigma-algebra	6
2 Predavanje 2	7
2.1 Elementarne familije	7
2.2 Borelove σ -algebre	9
2.3 Mjere	11
3 Predavanje 3	12
3.1 Mjera (nastavak)	12
3.2 Vanjske mjere	16
4 Predavanje 4	18
4.1 Caratheodoryev teorem, premjera, konstrukcija mjere	18
4.2 Borelove mjere	20
4.3 Lebesgueova mjera	21
5 Predavanje 5	23
5.1 Cantorov skup	23
5.2 Izmjerive funkcije	24
6 Predavanje 6	28
6.1 Osobine izmjerivih funkcija	28
6.2 Jednostavne funkcije	30

*sve eventualne greške u ovim bilješkama su skoro sigurno napravljene od strane autora skripte

7 Predavanje 7	32
7.1 Teorem o aproksimaciji	32
7.2 Integracija nenegativnih izmjerivih funkcija	34
8 Predavanje 8	35
8.1 Teorem monotone konvergencije (TMK)	35
8.2 Integracija $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ funkcija	38
9 Predavanje 9	44
9.1 Poređenje Riemannovog i Lebesgueovog integrala	44
II parcijala	49
10 Predavanje 10	49
10.1 Tipovi konvergencije	49
11 Predavanje 11	55
11.1 Produkt mjere. Teorem Fubini-Tonelli	55
12 Predavanje 12 i 13	61
12.1 L^p prostori ($1 \leq p \leq +\infty$)	61
12.2 L^∞ prostor	65
Dodatak	69
13 Index teorema	69

I parcijala

1 Predavanje 1

1.1 Nedostaci pojma Riemannovog integrala

Primjer 1.1.1. Tražimo niz $f_n \rightarrow f$ takav da $f_n \in \mathcal{R}([0, 1])$, ali $f \notin \mathcal{R}([0, 1])$. Tada $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, a $\int_0^1 f(x) dx$ ne postoji.

Definišemo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Možemo pisati $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$, jer je ovaj presjek prebrojiv skup i definišemo

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\}, \\ 0, & \text{inače na } [0, 1]. \end{cases}$$

Svaka f_n ima samo konačno mnogo tačaka prekida, pa $f_n \in \mathcal{R}[0, 1]$. Jasno je da $f_n \rightarrow f$ svuda na $[0, 1]$ kada $n \rightarrow \infty$.

Međutim, $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$. Zaista, za svaki $a \in [0, 1]$ možemo naći dva niza koji konvergiraju ka a :

$$p_n \rightarrow a, \quad p_n \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \quad r_n \rightarrow a, \quad r_n \in \mathbb{I} \cap [0, 1],$$

pa je $f(p_n) = 1 \neq 0 = f(r_n)$ za sve n, m , što znači da je f prekidna za svako $x \in [0, 1]$, dakle f nije Riemann integrabilna. $\square$

Napomena 1.1.2. Vidjećemo u nekom od idućih predavanja da skup $[0, 1]$ ima Lebesgueovu mjeru jednaku 1.

Primjer 1.1.3. Definišemo

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0, & \text{inače na } [0, 1]. \end{cases}$$

Za svako n :

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} n dx + \int_{1/n}^1 0 dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Dakle $f_n \in \mathcal{R}[0, 1]$. Izračunajmo $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$:

- $x = 0$: $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
- $x > 0, x \in [0, 1]$: postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\frac{1}{n_0} < x$, pa $f_n(x) = 0$ za sve $n \geq n_0$.

Dakle $f_n \rightarrow f \equiv 0$ na $[0, 1]$. Funkcija $f = 0$ je Riemann integrabilna i vrijedi:

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Zaključak:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{f(x)} dx. \square$$

Primjeri 1 i 2 ilustriraju nedostatke Riemannovog integrala.

1.2 Mjera na $\mathbb{R}^n$

Posmatrajmo $\mathbb{R}^n$. Želimo svakom $E \subseteq \mathbb{R}^n$ pridružiti mjeru $\mu E \in [0, +\infty)$ takvu da vrijedi:

$$(i) \quad \mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i.$$

(ii) $E \sim F \Rightarrow \mu E = \mu F$. Pri čemu je $^1 \sim$ relacija podudarnosti (kongruencije), tj. $E \sim F$ znači da se E može transformisati u F putem translacije, rotacije ili simetrije.

(iii) $\mu Q = 1$, $Q = [0, 1)^n$.

Pokažimo da već u $\mathbb{R}$ možemo naći skup za koji takva funkcija *ne postoji*.

1.3 Vitalijev primjer nemjerljivog skupa

Posmatramo $I = [0, 1)$. Definišimo relaciju $\sim$ na I na sljedeći način:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q},$$

MSP da je ovo relacija ekvivalencije, sa klasama ekvivalencije $[x]_{\sim} = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}$.

Npr. $[\frac{1}{2}]_{\sim} = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ je jedna klasa, a $[\frac{\sqrt{2}}{2}]_{\sim}$ još jedna njoj disjunktna klasa.

Da bi dobili osjećaj šta ove klase predstavljaju, posmatrajmo $[a]_{\sim} = \{x \in \mathbb{R} : x - a \in \mathbb{Q}\}$ za proizvoljno $a \in \mathbb{R}$. Dakle, $x \in \mathbb{R}$ pripada $[a]_{\sim}$, akko $x - a = q$, za neko $q \in \mathbb{Q}$, pa se $[a]_{\sim}$ sastoji od svih elemenata $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $x = a + q$, za neko $q \in \mathbb{Q} \cap [-a, a)$. Onda za primjer iznad imamo $[\frac{\sqrt{2}}{2}]_{\sim} = \{\frac{\sqrt{2}}{2} + q : q \in \mathbb{Q} \cap [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$.

Aksiom izbora nam sada omogućuje da iz svake klase ekvivalencije uzmemo jednog predstavnika klase i definišemo skup $N \subseteq [0, 1)$ kao skup predstavnika klase.

Definišimo sada operaciju $\dot{+}$ na $[0, 1)$ sa $x \dot{+} y := \{x + y\}$ (razlomljeni dio). Za svako $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ definišimo

$$N_r := N \dot{+} r = \{\{x + r\} : x \in N\}.$$

Vrijedi

$$N_r = ((N + r) \cap [0, 1)) \cup ((N + r - 1) \cap [0, 1)).$$

Tvrđnja 1.3.1. Ako $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ i $r_1 \neq r_2$, tada $N_{r_1} \cap N_{r_2} = \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\exists z \in N_{r_1} \cap N_{r_2}$. Tada postoje $x_1, x_2 \in N$ takvi da

$$\{x_1 + r_1\} = \{x_2 + r_2\}.$$

Iz toga slijedi $x_1 + r_1 = x_2 + r_2$ ili $x_1 + r_1 = x_2 + r_2 \pm 1$, tj. $x_1 - x_2 = r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}$, dakle $x_1 \sim x_2$. Ali x_1 i x_2 su predstavnici različitih klasa ekvivalencije, pa imamo kontradikciju. $\square$

¹suštinski

Dalje, vrijedi

$$[0, 1) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} N_r.$$

Jer, za svaki $x \in [0, 1)$ postoji jedinstveno $y \in N$ i $q \in \mathbb{Q}$ takvi da $x = \{y + q\}$. Stavimo² $r = \{q + 1\} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, pa $x \in N_r$.

Dakle $[0, 1)$ smo razbili na disjunktne podskupove N_r , i $\bigcup N_r$ je prebrojiva unija. Pretpostavimo da μ zadovoljava uvjete (i)–(iii). Ako $\mu[0, 1) = 1$, imamo:

$$1 = \mu[0, 1) = \mu\left(\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} N_r\right) \stackrel{(i)}{=} \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} \mu N_r.$$

Iz $N_{r_1} \sim N_{r_2}$ zbog osobine (ii) slijedi da $\mu N_{r_1} = \mu N_{r_2}$. Tada:

- Ako $\mu N_r > 0$: red na desnoj strani iznad divergira, pa $+\infty \neq 1$.
- Ako $\mu N_r = 0$: suma je $0 \neq 1$.

Kontradikcija u oba slučaja. Dakle, $[0, 1)$ nije mjerljiv, postoje skupovi kojima se ne može pridružiti mjera sa osobinama (i), (ii), (iii).

Napomena 1.3.2. Bez aksioma izbora ne možemo dokazati da nemjerljiv skup postoji³.

²+1 nam treba da sredimo slučaj kada $q < 0$.

³Solovay, 1970

1.4 Sigma-algebra

Definicija 1.4.1. Neka je $X \neq \emptyset$ skup i $\mathcal{A}$ neprazna familija podskupova od X . Ako vrijede uslovi

$$(1) \emptyset, X \in \mathcal{A}$$

$$(2) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$(3) A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$$

onda $\mathcal{A}$ nazivamo *algebrom* od X .

Napomena: Uvjet (1) nije nužno posebno tražiti jer iz $X \neq \emptyset$, (2) i (3) slijedi:

$$A \in \mathcal{A} \xrightarrow{(2)} A^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{(3)} A \cup A^c = X \in \mathcal{A} \xrightarrow{(2)} X^c = \emptyset \in \mathcal{A}.$$

Definicija 1.4.2. Neprazna familija $\mathcal{A}$ podskupova od $X \neq \emptyset$ je σ -**algebra** ako:

$$(i) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A},$$

$$(ii) A_i \in \mathcal{A} \text{ za sve } i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Svaka σ -algebra je algebra, ali obrnuto ne vrijedi.

Primjer 1.4.1. Trivijalne σ -algebre:

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}, \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(X),$$

Primjer 1.4.2. Još jedna jednostavna σ -algebra:

$$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, A, A^c, X\} \text{ za neki fiksni } A \subseteq X.$$

Primjeri

Primjer 1.4.3. Neka je $X \neq \emptyset$ i

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ je prebrojiv ili } A^c \text{ je prebrojiv}\}.$$

Tada je $\mathcal{A}$ σ -algebra.

Zadaća 1

Primjer 1.4.4. Neka je $X \neq \emptyset$ i

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ je konačan ili } A^c \text{ je konačan}\}.$$

Ispitati je li $\mathcal{A}$ algebra i/ili σ -algebra za svaki od sljedećih slučajeva:

Skup X	Algebra	σ -algebra
X konačan	?	?
X prebrojiv (beskonačan)	?	?
X neprebrojiv	?	?

2 Predavanje 2

Kako je $\bigcap E_j = \left(\bigcap E_j^c\right)^c$ to vidimo da su algebre, odnosno σ -algebre zatvorene u odnosu na konačne, odnosno prebrojive, presjeke.

Primjetimo da je algebra $\mathcal{A}$ σ -algebra ukoliko je zatvorena u odnosu na prebrojive disjunktne unije. Zaista, neka je $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right) = E_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)^c$$

odakle slijedi $F_k \in \mathcal{A}$ i svi F_i su međusobno disjunktni i $\bigcup_i^\infty E_i = \bigcup_i^\infty F_i$. Ovo nam pokazuje da proizvoljan niz skupova možemo zamijeniti nizom disjunktih skupova.

2.1 Elementarne familije

Definicija 2.1.1. Familija $\mathcal{E}$ podskupova skupa X koja zadovoljava sljedeće osobine naziva se elementarna familija:

- i) $\emptyset \in \mathcal{E}$
- ii) $E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{E}$
- iii) ako $E \in \mathcal{E}$ onda je E^c konačna disjunktina unija elemenata iz $\mathcal{E}$

Propozicija 2.1.1. Familija $\mathcal{A}$ konačnih disjunktih unija elementa od $\mathcal{E}$ je algebra.

Dokaz. Trebamo provjeriti da li je familija $\mathcal{A}$ zatvorena u odnosu na konačne unije i komplemente.

1) Primjetimo da je $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$

2) Pokažimo sada da za bilo koje $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ (ne nužno disjunktne) vrijedi da $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$.

Podjelićemo dokaz u 2 dijela.

1° Pokažimo da $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$$A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{E} \Rightarrow A = \biguplus_{i=1}^n A_i, A_i \in \mathcal{E} \quad \text{ i } \quad B^c = \biguplus_{j=1}^m B_j, B_j \in \mathcal{E}$$

Tada je

$$A \cap B^c = \left(\biguplus_{i=1}^n A_i\right) \cap \left(\biguplus_{j=1}^m B_j\right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$$

Što je konačna unija disjunktih unija elemenata iz $\mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ i $(A \cap B^c) \cap B = \emptyset$, pa slijedi $A \cup B \in \mathcal{A}$.

2° Pokažimo sada da ako $\{A_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{E}$, $n \geq 2 \Rightarrow \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$.

Za $n = 2$ rezultat direktno slijedi iz 1) i 2).1°. Pretpostavimo da je $n > 2$ i da prema induktivnoj ptp. vrijedi $\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \in \mathcal{A}$. Tada iz 2).1° $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n \in \mathcal{A}$. Dakle, $\mathcal{A}$ je familija konačnih unija el. iz $\mathcal{E}$. Pokažimo sada da je $\mathcal{A}$ algebra. Kako je $\mathcal{A}$ familija konačnih unija elemenata iz $\mathcal{E}$, odmah slijedi da je $\mathcal{A}$ zatvorena u odnosu na konačne unije

(konačna unija konačnih unija je opet konačna unija). Ako $A \in \mathcal{A}$ onda $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ gdje su A_j disjunktni skupovi iz $\mathcal{E}$. Tada za svako $j \in \{1, \dots, n\}$ imamo $A_j^c = \bigcup_{i=1}^{n_j} B_{j,i}$, $B_{j,i} \in \mathcal{E}$. Dakle,

$$A^c = \bigcap_{j=1}^n A_j^c = \bigcap_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{n_j} B_{j,i} = \bigcup \{B_{1,j_1} \cap \dots \cap B_{n,j_n} : 1 \leq j_k \leq n_k, 1 \leq k \leq n\}$$

pa slijedi da je A^c konačna unija članova iz $\mathcal{E}$, dakle $A^c \in \mathcal{A}$. Ovim smo dokazali da je $\mathcal{A}$ algebra. $\square$

Primjer 2.1.2. Presjek σ -algebri je opet σ -algebra.

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ proizvoljan presjek σ -algebri $\mathcal{A}_\alpha, \alpha \in I$. Tada

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\alpha, \forall \alpha \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\alpha, \forall \alpha \in I \Rightarrow A^c \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{F}$$

Slično se pokaže i za $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. $\square$

2.2 Borelove σ -algebre

Neka je X proizvoljan metrički prostor (ili općenitije, proizvoljan topološki prostor). Ako je $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, tada postoji jedinstvena najmanja σ -algebra, u oznaci $\sigma(\mathcal{E})$, koja sadrži $\mathcal{E}$. Nazivamo je još i σ -algebra generisana sa $\mathcal{E}$, i podrazumijevamo da je $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)} \mathcal{F}$, pri

čemu za svako $\mathcal{F}$ vrijedi $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}$ je σ -alg.. Ovo je dobro definisano jer postoji bar jedna σ -alg. koja sadrži $\mathcal{E}$ i to je $\mathcal{P}(X)$.

Ako bi $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ bila neka druga σ -algebra koja sadrži $\mathcal{E}$, onda bismo imali $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}$ jer $\mathcal{M}$ je jedna od $\mathcal{F}$ u presjeku iznad.

Lema 2.2.1. $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F}) \implies \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F})$.

Dokaz. $\sigma(\mathcal{F})$ je σ -alg. i $\sigma(\mathcal{F}) \supset \mathcal{E} \implies \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F})$. □

Definicija 2.2.1. Neka je X topološki prostor. σ -algebru generisanu familijom svih otvorenih podskupova od X nazivamo Borelovom σ -algebrom na X i označavamo sa $\mathcal{B}_X$. Elemente $\mathcal{B}_X$ nazivamo Borelovim skupovima.

Definicija 2.2.2. Prebrojivi presjek otvorenih skupova naziva se G_δ skup. Prebrojiva unija zatvorenih skupova naziva se F_σ skup⁴.

Propozicija 2.2.2. $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ je generirana svakom od sljedećih familija:

- a) $\mathcal{E}_1 = \{ (a, b) : -\infty < a < b < +\infty \}$,
- b) $\mathcal{E}_2 = \{ [a, b] : -\infty < a \leq b < +\infty \}$,
- c) $\mathcal{E}_3 = \{ [a, b) : -\infty < a \leq b < +\infty \}$ ili $\mathcal{E}_4 = \{ (a, b] : -\infty < a < b < +\infty \}$,
- d) $\mathcal{E}_5 = \{ (a, +\infty) : a \in \mathbb{R} \}$ ili $\mathcal{E}_6 = \{ (-\infty, a) : a \in \mathbb{R} \}$
- e) $\mathcal{E}_7 = \{ [a, +\infty) : a \in \mathbb{R} \}$ ili $\mathcal{E}_8 = \{ (-\infty, a] : a \in \mathbb{R} \}$

Dokaz. Dokažimo da vrijedi pod a., tj. $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Neka $(a, b) \in \mathcal{E}_1$ proizvoljan interval. (a, b) je otvoren skup pa $(a, b) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ po definiciji $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, pa slijedi $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$, iz čega dalje po lemi 2.2.1. slijedi $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ (*).

Obratno, neka je $U \subset \mathbb{R}$ proizvoljan otvoren skup (tj. $U \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$) i neka $x \in U$. Skup U je otvoren pa po definiciji otvorenog skupa postoji okolina, tj. interval, potpuno sadržan u U i takav da je x u tom intervalu.

Ako je x racionalan broj, definišimo $I_x = \bigcup_{x \in I \subset U} I$, pri čemu su I u uniji otvoreni intervali. I_x onda predstavlja uniju nedisjunktnih otvorenih intervala (nedisjunktnu, jer svaki sadrži x), pa je I_x otvoreni interval sadržan u U , tj. $I_x \subset U$.

Ako je x iracionalan broj, onda jer je U otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. S obzirom da je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, to postoji $y \in \mathbb{Q}$ t.d. $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I_y$, pri čemu je I_y definisano prema sa definicijom iznad (unija svih otvorenih intervala u kojima je y sadržano, i koji su sadržani u U) i vidjeli smo da je I_y otvoreni interval.

Dakle vrijedi $x \in I_y$. Pa imamo da svako $x \in U$ pripada nekom otvorenom intervalu I_q za neko $q \in U \cap \mathbb{Q}$. Zbog tog dobijamo $U \subset \bigcup_{q \in U \cap \mathbb{Q}} I_q$.

⁴Može se upamtiti tako što sigma simbolizira sumu, a suma skupova je unija.

S druge strane $I_q \subset U \forall q \in U \cap \mathbb{Q} \Rightarrow U = \bigcup_{q \in U \cap \mathbb{Q}} I_q$. Pa je U prebrojiva unija otvorenih intervala, što znači da je $U \in \sigma(\mathcal{E}_1)$. Krenuli smo od $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, dobili smo $U \in \sigma(\mathcal{E}_1)$, pa slijedi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ ($\star\star$).

Sada iz ($\star$) i ($\star\star$) slijedi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Pokažimo sada da je $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_3)$.

Neka $(a, b] \in \mathcal{E}_3$ proizvoljan. Tada

$$\underbrace{(a, b]}_{\in \mathcal{E}_3} = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})}_{\substack{\in \mathcal{E}_1 \\ \in \sigma(\mathcal{E}_1)}} \Rightarrow \mathcal{E}_3 \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \xrightarrow{(\text{Lema 2.2.1.})} \sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \quad (\Delta)$$

Neka je sada $(a, b) \in \mathcal{E}_1$ proizvoljan i neka $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da vrijedi $a < b - \frac{1}{n_0}$. Tada

$$\underbrace{(a, b)}_{\in \mathcal{E}_1} = \underbrace{\bigcup_{n=n_0}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})}_{\substack{\in \mathcal{E}_3 \\ \in \sigma(\mathcal{E}_3)}} \Rightarrow \mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_3) \xrightarrow{(\text{Lema 2.2.1.})} \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_3) \quad (\Delta\Delta)$$

Sada iz (Δ) i ($\Delta\Delta$) dobijamo $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_3)$.

Pokažimo da vrijedi $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_5)$.

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, a+n) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_5) \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \quad (\blacksquare)$$

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a, +\infty) \setminus [b, +\infty) = (a, +\infty) \cap ([b, +\infty))^c = (a, +\infty) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n}, +\infty)^c \right) \\ &= \underbrace{(a, +\infty)}_{\in \mathcal{E}_5} \cap \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{n}, +\infty)^c \right)}_{\substack{\in \mathcal{E}_5 \\ \in \sigma(\mathcal{E}_5)}} \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_5) \quad (\blacksquare\blacksquare) \end{aligned}$$

Iz ($\blacksquare$) i ($\blacksquare\blacksquare$) slijedi da vrijedi $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_5)$. □

Zadaća 2.

- Pokazati da se svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}$ može prikazati kao disjunktna unija otvorenih intervala.
- Završiti dokaz Propozicije 2.2.1.

2.3 Mjere

Definicija 2.3.1. Neka je X skup i $\mathcal{M}$ σ -algebra podskupova od X . Mjera na $(X, \mathcal{M})$ je preslikavanje $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ sa osobinama:

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i), \text{ za svaki niz } \{E_i\} \subset \mathcal{M} \text{ međusobno disjunktne skupove.}$$

Za uređeni par $(X, \mathcal{M})$ kažemo da je izmjerljiv prostor. Za elemente iz $\mathcal{M}$ kažemo da su izmjerljivi skupovi. Za uređenu trojku $(X, \mathcal{M}, \mu)$ kažemo da je prostor mjere.

Definicija 2.3.2. Za mjeru μ kažemo da je konačna ako je $\mu(X) < \infty$, a za mjeru μ kažemo da je σ -konačna ako je $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, $E_j \in \mathcal{M}$, $\forall j$ i $\mu(E_j) < +\infty \forall j$.

Za mjeru kažemo da je polukonačna ako za svaki $E \in \mathcal{M} : \mu(E) = \infty$ postoji $F \subset E$, $F \in \mathcal{M}$, t.d. vrijedi $0 < \mu(F) < \infty$.

Napomena 2.3.1. Osobina (ii) se naziva osobina prebrojive aditivnosti i ona implicira konačnu aditivnost, nazovimo je osobina (iii). U to se možemo uvjeriti na sljedeći način: ako su $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}$ disjunktne skupovi, onda je $\mu\left(\biguplus_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$, jer možemo uzeti $E_j = \emptyset$, $\forall j \geq n+1$.

Funkcija koja zadovoljava (i) i (iii), ali ne nužno i (ii), naziva se konačna aditivna mjera.

Primjer 2.3.2 (Mjera prebrojavanja). Neka je $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ i $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ funkcija data sa:

$$\mu(E) = \begin{cases} n, & |E| = n, (E \text{ konačan skup sa } n \text{ elemenata.}) \\ \infty, & E \text{ beskonačan skup} \end{cases}$$

Dokazati da je μ mjera.

Dokaz. i) $\mu(\emptyset) = 0$, jer $\emptyset$ smatramo konačnim sa 0 elemenata.

ii) Neka su $E_1, \dots \in \mathcal{M}$ međusobno disjunktne skupovi. Ako je $\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ konačan skup, onda u ovoj uniji mora biti samo konačno mnogo skupova koji su konačni, a ostali skupovi su prazni. B.u.o. možemo ptp. da su $E_1, \dots, E_n$ konačni skupovi, a $E_j = \emptyset$, $\forall j > n$. Kako su to međusobno disjunktne skupovi, to prema formuli uključenja-isključenja imamo:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| - \sum_{k=?}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k < n} |E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}| = \sum_{i=1}^n |E_i|$$

jer vrijedi $E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k} = \emptyset$ za $k \geq 2$.

Dakle $\mu\left(\biguplus_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$, tj. $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, jer su $E_{n+1}, E_{n+2}, \dots$ prazni skupovi.

Ako je $\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ beskonačan skup, moguća su dva slučaja:

1) $\exists i_0$ t.d. je $\mu(E_{i_0}) = +\infty$, tj. E_{i_0} je beskonačan skup. Tada je i $\left| \biguplus_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \infty$ i očito vrijedi $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

2) Svi E_i su konačni i ima ih beskonačno mnogo različitih od praznog skupa. Tada $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = +\infty$ jer u ovom pozitivnom redu opći član ne teži nuli, pa on divergira ka $+\infty$. Dakle zadovoljeno je $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. $\square$

3 Predavanje 3

3.1 Mjera (nastavak)

(primjeri mjera, nastavak)

Primjer 3.1.1 (Diracova mjera ili tačkasta mjera). $X \neq \emptyset, \mathcal{P}(X) = \mathcal{M}, \mu_{x_0} : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu_{x_0}(E) := \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}, \quad E \in \mathcal{M}$$

Dokazati da je μ_{x_0} mjera.

Dokaz. i) $\mu_{x_0}(\emptyset) = 0$, jer $x_0 \notin \emptyset$.

ii) Neka $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ t.d. $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Imamo

$$\mu_{x_0}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{x_0}(E_i)$$

Sada imamo 2 slučaja:

$$1^\circ : x_0 \notin \biguplus_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow x_0 \notin E_i \forall i \Rightarrow \mu_{x_0}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{x_0}(E_i)$$

$$2^\circ : x_0 \in \biguplus_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \exists! i_0 : x_0 \in E_{i_0} \text{ i } x_0 \notin E_i \text{ za } i \neq i_0. \text{ Tada vrijedi}$$

$$\mu_{x_0}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 1 = 1 + 0 = 1 + \sum_{i \neq i_0} 0 = \mu_{x_0}(E_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \mu_{x_0}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{x_0}(E_i)$$

$\square$

Primjer 3.1.2. Neka X neprebrojiv skup i $\mathcal{M} = \{A \subseteq X : A \text{ prebrojiv ili } A^c \text{ prebrojiv}\}$. Definišemo μ i ν ⁵ sa

$$\mu(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ prebrojiv} \\ +\infty, & E^c \text{ prebrojiv} \end{cases}, \quad \nu(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ prebrojiv} \\ 1, & E^c \text{ prebrojiv} \end{cases}$$

Dokazati da su μ i ν mjere.

Dokaz. 1°: Pokažimo da je μ mjera.

i) $\mu(\emptyset) = 0$ jer je $\emptyset$ konačan (pa i prebrojiv⁶)

ii) Neka $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ po parovima disjunktne skupove.

⁵čitamo "ni"

⁶sa prebrojiv mislimo najviše prebrojiv

Ako $\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ prebrojiv onda su E_i prebrojivi $\forall i$, pa $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0 = \sum_i 0 = \sum_i \mu(E_i)$.

Ako $\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c$ prebrojiv, $\Rightarrow \biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ neprebrojiv $\Rightarrow \exists i_0 : E_{i_0}$ neprebrojiv
 $\Rightarrow E_{i_0}^c$ je prebrojiv, jer $E_{i_0} \in \mathcal{M}$.

Tada je $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = +\infty = \mu(E_{i_0}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Dakle μ je mjera.

2° : Pokažimo da je ν mjera.

i) $\nu(\emptyset) = 0$, jer je $\emptyset$ konačan.

ii) Neka $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ međusobno disjunktni.

Ako $\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ prebrojiv $\Rightarrow \forall i$ E_i prebrojivi $\Rightarrow \nu(E_i) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$.

Ako $\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c$ prebrojiv $\Rightarrow \biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ je neprebrojiv $\Rightarrow \exists i_0 : E_{i_0}$ neprebrojiv
 $\Rightarrow E_{i_0}^c$ je prebrojiv
 $\Rightarrow \nu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 1 \wedge \nu(E_{i_0}) = 1$

Pa da bi dokazali da je ν mjera, trebamo pokazati da pored E_{i_0} u polaznom disjunktном prebrojivom nizu ne može biti više nijedan neprebrojiv skup.

Ptp. suprotno: neka postoje i_0 i i_1 t.d. su $E_{i_0}, E_{i_1} \in \mathcal{M}$, $E_{i_0} \cap E_{i_1} = \emptyset$ i $E_{i_0}^c, E_{i_1}^c$ prebrojivi. Kako su ovi skupovi disjunktni, odmah slijedi da je $E_{i_0} \subseteq E_{i_1} \Rightarrow E_{i_0}$ je prebrojiv jer je $E_{i_1}^c$ prebrojiv, što je kontradikcija. Dakle postoji tačno jedno i_0 t.d. $E_{i_0}^c$ prebrojiv (ili ekvivalentno E_{i_0} neprebrojiv).

Za ostale E_i slijedi da su prebrojivi pa imamo

$$\nu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 1 = \nu(E_{i_0}) + \sum_{i=1}^{\infty} 0 = \nu(E_{i_0}) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

□

Primjer 3.1.3. Neka X beskonačan, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$,

$$\mu(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ konačan} \\ \infty, & E \text{ beskonačan} \end{cases}$$

Ispitati da li je μ mjera.

Rješenje. i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\emptyset$ konačan.

ii) $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ međusobno disjunktni.

Ako $\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ konačan, onda imamo beskonačno mnogo praznih skupova u nizu, i konačno mnogo konačnih.

Ako $\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i$ beskonačno, onda $\exists i_0 : E_{i_0}$ beskonačan, ili su E_i konačni za svako i . Navedimo idući (kontra)primjer koji odgovara posljednjem slučaju.

Imamo $\mathbb{N} = \biguplus_{i=1}^{\infty} \{i\}$, međutim $\mu(\mathbb{N}) = +\infty$, a $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} \{i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{i\}) = 0$, pa μ ne može biti mjera.

Teorem 3.1.4 (O osnovnim osobinama mjere). Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Tada vrijedi:

a) Monotonost:

$$E, F \in \mathcal{M} : E \subseteq F \implies \mu(E) \leq \mu(F).$$

b) Subaditivnost:

$$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M} \implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

c) Neprekidnost odozdo (ili u odnosu na rastuće unije):

$$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}, \quad E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

d) Neprekidnost odozgo (ili u odnosu na opadajuće presjeke):

$$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}, \quad E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots, \quad \mu(E_k) < +\infty \text{ za neko } k \in \mathbb{N} \implies \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

Dokaz. a)

$$E \subseteq F \Rightarrow F = E \uplus (F \setminus E) \Rightarrow \mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$$

Napomena 3.1.5. Vrijedi $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$, kada je $\mu(F) < +\infty$.

b) Definirajmo $F_1 := E_1$ i $F_k := E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ za $k \geq 2$. Tada su skupovi F_i međusobno disjunktni i vrijedi:

$$\biguplus_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

gdje smo u posljednjem koraku iskoristili $F_i \subseteq E_i$ i osobinu a) tj. monotonost.

c) Budući da je $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$, pišemo:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \biguplus_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus E_{i-1}), \quad E_0 := \emptyset.$$

Tada:

$$\begin{aligned} \mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus E_{i-1})\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(E_i \setminus E_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\biguplus_{i=1}^n (E_i \setminus E_{i-1})\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

d) B.u.o. neka je $k = 1$, tj. $\mu(E_1) < +\infty$. Za svako $j \geq 2$ definirajmo $F_j := E_1 \setminus E_j$. Tada:

$$\bigcup_{j=2}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=2}^{\infty} (E_1 \setminus E_j) = \bigcup_{j=2}^{\infty} (E_1 \cap E_j^c) = E_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{\infty} E_j^c \right) = E_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j \right)^c = E_1 \setminus \bigcap_{j=2}^{\infty} E_j.$$

Primijetimo da $F_k \subseteq F_{k+1}$ za sve k , tj. niz (F_j) je rastući. Budući da $\mu(E_1) < +\infty$, vrijedi $\mu(E_j) < +\infty$ za sve j , pa i $\mu(F_j) < +\infty$ za sve j . Pa imamo

$$\mu(F_j) = \mu(E_1 \setminus E_j) = \mu(E_1) - \mu(E_j) \Rightarrow \mu(E_1) = \mu(F_j) + \mu(E_j), \quad \forall j \geq 1.$$

Naposljetku primjenom osobine c) na niz (F_j) dobijamo:

$$\mu\left(\bigcup_{j=2}^{\infty} F_j\right) = \mu\left(E_1 \setminus \left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right)\right) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right)$$

Pa slijedi

$$\begin{aligned} \mu(E_1) &= \mu\left(\bigcup_{j=2}^{\infty} F_j\right) + \mu\left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right) \stackrel{c)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) + \mu\left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n)) + \mu\left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right) \\ &= \mu(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) + \mu\left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right) \end{aligned}$$

Kako je $\mu(E_1) < +\infty$, možemo $\mu(E_1)$ oduzeti s obje strane i dobiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right),$$

gdje smo u posljednjem koraku iskoristili $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ odakle slijedi $\bigcap_{j=2}^{\infty} E_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$. $\square$

Napomena 3.1.6. U teoriji mjere $\infty - \infty$ nije definirano, jer se ne može konzistentno definirati, što možemo vidjeti na idućem primjeru.

S jedne strane

$$\mu(\mathbb{N}) = \mu(\mathbb{N} \setminus \{1\}) + \mu(\{1\}) \Rightarrow \mu(\{1\}) = \mu(\mathbb{N}) - \mu(\mathbb{N} \setminus \{1\}) = \infty - \infty = 1$$

S druge strane

$$\mu(\mathbb{N}) = \mu(\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}) + \mu(\{1, 2\}) \Rightarrow \mu(\{1, 2\}) = \mu(\mathbb{N}) - \mu(\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}) = \infty - \infty = 2$$

Pa vidimo da u različitim situacijama imamo različite vrijednosti za $\infty - \infty$.

Napomena 3.1.7. Uvjet $\mu(E_k) < +\infty$ u dijelu d) ne može se izostaviti. Kao kontraprimer uzmimo $E_j := (j, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ pri čemu za mjeru μ uzimamo dužinu intervala⁷. Tada $\mu(E_j) = +\infty$ za sve j , ali $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \emptyset$, pa:

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

Dakle, d) ne mora vrijediti ako nema bar jedne skupove konačne mjere.

⁷tj. Lebesgueovu mjeru

Definicija 3.1.1 (Skup mjere nula; osobina gotovo svuda). Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i $E \in \mathcal{M}$.

- Kažemo da je E skup mjere nula ako je $\mu(E) = 0$.
- Ako neka osobina vrijedi $\forall x \in X$ osim za x -ove iz nekog nula skupa, onda kažemo da ta osobina vrijedi *za gotovo sve* x , tj. da vrijedi *gotovo svuda*, i pišemo g.s.

Primjer 3.1.8. Neka je $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 1, & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Tada $f(x) = 1$ gotovo svuda (s obzirom na Lebesgueovu mjeru), budući da je $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ skup mjere nula. *Da li se može reći da je f neprekidna gotovo svuda?*

Jasno je na osnovu osobina mjere, da ako $E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0$ i $F \subseteq E, F \in \mathcal{M}$ onda $\mu(F) = 0$. Općenito, ako F nije izmjerljiv, tj. ako $F \notin \mathcal{M}$, onda upravo pomenuto ne mora vrijediti.

Definicija 3.1.2 (Potpuna mjera). Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Ako $\forall E \in \mathcal{M}$ t.d. $\mu(E) = 0$ i $F \subseteq E \Rightarrow F \in \mathcal{M}$, onda kažemo da je mjera μ potpuna.

Napomena 3.1.9. Za F kao iz definicije iznad onda naravno vrijedi $\mu(F) = 0$.

Teorem 3.1.10 (O upotpunjenju mjere). Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i neka je

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}.$$

Definirajmo:

$$\overline{\mathcal{M}} := \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, F \subseteq N \text{ za neko } N \in \mathcal{N}\}.$$

Tada je $\overline{\mathcal{M}}$ σ -algebra, te postoji jedinstveno produženje $\bar{\mu}$ mjere μ na $\overline{\mathcal{M}}$, t.d. $\bar{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$.

Dokaz. Preskačemo. □

Ovaj teorem nam pokazuje da se svaki prostor mjere može upotpuniti do potpunog prostora, na opisani način.

3.2 Vanjske mjere

Definicija 3.2.1. Neka $X \neq \emptyset$ za preslikavanje $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ sa idućim osobinama:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- za proizvoljan niz skupova $A_n \subseteq X, n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$

kažemo da je vanjska mjera.

Napomena 3.2.1. Svaka mjera je vanjska mjera, ali svaka vanjska mjera ne mora biti mjera.

Propozicija 3.2.2. Neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ t.d. $\emptyset, X \in \mathcal{E}$, $\rho(\emptyset) = 0$. Za svaki $A \subseteq X$ definirajmo

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E}, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$$

tada je μ^* vanjska mjera na X .

Napomena. Pretpostavljamo $X \in \mathcal{E}$ da bi bili sigurni da u def. μ^* uvijek možemo naći niz skupova E_j čijim uniranjem možemo pokriti A .

Dokaz. $\emptyset \in \mathcal{E}$, $\rho(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mu^*(\emptyset) = 0$ (uzmemo $E_j = \emptyset$, $\forall j$).

Ako $A \subseteq B$ onda svaki pokrivač od B je pokrivač od A . Ali, A može imati pokrivače koji nisu pokrivači od B . To znači da je

$$\{E_j \in \mathcal{E} : A \subseteq \bigcup E_j\} \supseteq \{E_j \in \mathcal{E} : B \subseteq \bigcup E_j\}$$

pa zbog osobine⁸ infimuma da je infimum manjeg⁹ skupa veći ili jednak od infimuma većeg skupa imamo

$$\inf \{E_j \in \mathcal{E} : A \subseteq \bigcup E_j\} \leq \inf \{E_j \in \mathcal{E} : B \subseteq \bigcup E_j\} \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B).$$

Sada neka $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ i neka $\varepsilon > 0$. Tada za $\forall j \exists \{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ t.d.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) < \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Imamo $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, pa je

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^j,$$

i stoga

$$\mu^*(A) \leq \sum \rho(e_k^j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$, pa je μ^* vanjska mjera. $\square$

⁸lahko se uvjerimo u ovo na primjeru na $\mathbb{R}$, uzmemo $(a, b) \subseteq (c, d)$.

⁹u smislu inkluzije

4 Predavanje 4

4.1 Caratheodoryev teorem, premjera, konstrukcija mjere

Propozicija sa kraja prošlog predavanja nam pokazuje kako konstruirati vanjsku mjeru na bilo kojem skupu. Na primjer, uzimamo interval (a, b) i definirajmo $\rho((a, b)) = b - a$; koristeći upravo dokazanu propoziciju možemo definirati vanjsku mjeru¹⁰ na $\mathbb{R}$. Vidjet ćemo sada kako iz vanjske mjere možemo konstruirati mjeru, kroz teorem Caratheodorya.

Definicija 4.1.1 (Caratheodoryev uslov). Neka je μ^* vanjska mjera na X . Za $A \subseteq X$ kažemo da je μ^* -izmjeriv ako za svaki $E \subseteq X$ vrijedi

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Primjedba: primjetimo da uvijek vrijedi $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$, pa slijedi

$$\mu^*(E) = \mu^*((E \cap A) \cup (E \cap A^c)) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Dakle, da bismo dokazali da je A μ^* -izmjeriv, dovoljno je pokazati obratnu nejednakost:

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

Primjer 4.1.1. Definirajmo $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ sa

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \text{ konačan}, \\ +\infty, & A \text{ beskonačan}. \end{cases}$$

Ispitati da li je μ^* vanjska mjera na $\mathbb{N}$. Da li je skup $\{1, 3, 5, \dots\}$ μ^* -izmjeriv.

Rješenje. Provjera da je μ^* vanjska mjera:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- Monotonost: Neka $A \subseteq B$, imamo sljedeće slučajeve
 1. A konačan, B konačan: $\mu^*(A) = 1 \leq 1 = \mu^*(B)$.
 2. A konačan, B beskonačan: $\mu^*(A) = 1 \leq +\infty = \mu^*(B)$.
 3. A beskonačan, B beskonačan: $\mu^*(A) = +\infty \leq +\infty = \mu^*(B)$.
- Sub-aditivnost: Neka $A_j \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ posmatramo $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, i opet imamo slučajeve:
 1. Ako je $\bigcup A_j$ konačan: tada je svaki A_j konačan (uz eventualno konačno mnogo nepraznih), pa $\mu^*(\bigcup A_j) = 1 \leq 1 \leq \sum \mu^*(A_j)$.
 2. Ako je $\bigcup A_j$ beskonačan: tada ili $\mu^*(A_j) = 1$ za beskonačno mnogo j (pa $\sum \mu^*(A_j) = +\infty$), ili postoji j_0 takav da je $|A_{j_0}| = \infty$ (pa je $\mu^*(A_{j_0}) = +\infty$). U oba slučaja $\sum \mu^*(A_j) = +\infty$.

¹⁰Foreshadow: Ovako dobijemo Lebesgueovu vanjsku mjeru.

Dakle, $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ u svakom slučaju. Pa je μ^* uistinu vanjska mjera.

Sada, je li $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ μ^* -izmjeriv? Ako jeste, trebalo bi pokazati da za svaki $E \subseteq \mathbb{N}$ vrijedi $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$. Ali evo kontraprimjer: uzmemo $E = \{1, 2\}$. Tada $E \cap A = \{1\}$ i $E \cap A^c = \{2\}$, pa

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = 1 + 1 = 2 \not\leq 1 = \mu^*(E).$$

Dakle, A nije μ^* -izmjeriv. □

Teorem 4.1.2 (Caratheodory, bez dokaza). Neka je μ^* vanjska mjera na X . Tada familija $\mathcal{M}$ svih μ^* -izmjerivih skupova čini σ -algebru, a $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ je mjera, i to potpuna.

Napomena. Pomoću premjere ρ (definicija ispod) definiramo vanjsku mjeru μ^* (kao u propoziciji), potom μ^* suzimo na $\mathcal{M}$ i dobijemo mjeru μ .

Definicija 4.1.2 (Premjera). Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ algebra. Funkcija $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ naziva se *premjera* ako:

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$,
2. $\mu_0(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$ za disjunktne skupove $A_i \in \mathcal{A}$ takve da $\biguplus A_i \in \mathcal{A}$.

Propozicija 4.1.3. Neka je μ_0 premjera na $\mathcal{A}$ i definirajmo μ^* sa

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A}, E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}.$$

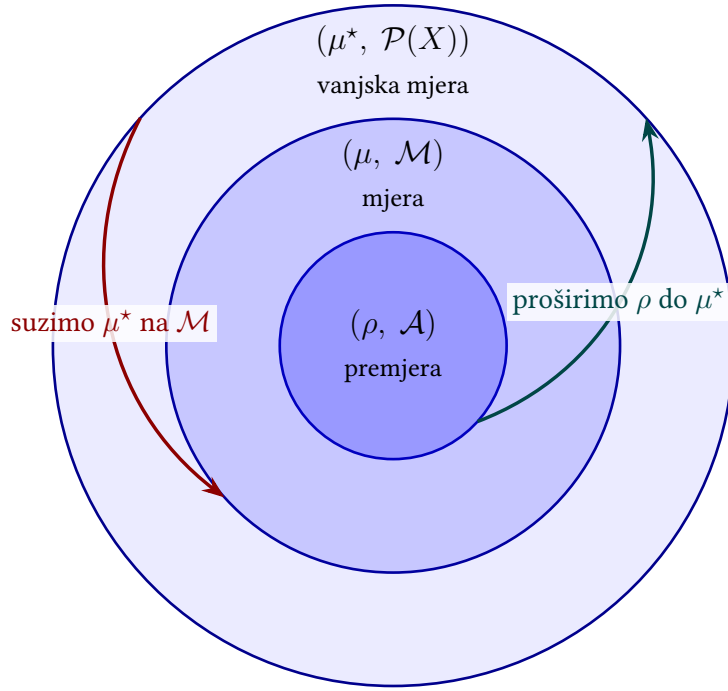
Tada je $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ i svaki skup iz $\mathcal{A}$ je μ^* -izmjeriv.

Napomena. Pod b) je sadržana i tvrdnja da je μ^* vanjska mjera, jer smo μ^* -izmjerivost definirali izričito za v.m.

Teorem 4.1.4 (O proširenju premjere). Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ algebra podskupova od X , μ_0 premjera na $\mathcal{A}$, te $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$. Tada postoji mjera μ na $\mathcal{M}$ takva da je $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

Nadalje, ako je ν druga mjera na $\mathcal{M}$ takva da $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$, tada $\nu(E) \leq \mu(E)$, $\forall E \in \mathcal{M}$.

Ako je μ_0 ograničena, onda je μ jedinstveno proširenje od μ_0 na $\mathcal{M}$.



Shematski prikaz konstrukcije mjere μ , preko premjere ρ i vanjske mjere μ^* .

4.2 Borelove mjere

Neka je $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ prostor mjere. Neka je μ konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}$. Pridružujemo joj funkciju

$$F(x) = \mu((-\infty, x]),$$

koju nazivamo *funkcija distribucije* od μ .

Primjetimo da vrijedi $(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]$ kad god $x_n \searrow x$.

Za $a < b$ imamo $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$, pa

$$\begin{aligned}\mu((-\infty, b]) &= \mu((-\infty, a]) + \mu((a, b]), \\ \mu((a, b]) &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Napomena. Funkcija F je neprekidna zdesna, tj. $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ za svaki niz $x_n \searrow x$.

Propozicija 4.2.1. Neka je $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rastuća i neprekidna zdesna funkcija. Za disjunktne intervale $(a_j, b_j]$ definirajmo μ_0 na sljedeći način

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]\right) := \sum_{j=1}^n [F(b_j) - F(a_j)], \quad \mu_0(\emptyset) = 0.$$

Tada je μ_0 premjera na algebri $\mathcal{A}$ koja se sastoji od skupova oblika $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $\emptyset$ i konačnih disjunktne unija takvih skupova.

Napomena. Ovo kombinujemo sa pričom od ranije i prelaskom na vanjsku mjeru, i tako dobijemo Borelovu mjeru.

Teorem 4.2.2 (Egzistencija i jedinstvenost Borelove mjere). Neka je $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rastuća i neprekidna zdesna funkcija. Tada postoji jedinstvena Borelova mjera μ_F na $\mathbb{R}$ takva da

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Ako je G druga takva funkcija, tada

$$\mu_F = \mu_G \iff F - G = \text{const.}$$

Obratno, ako je μ Borelova mjera koja je konačna na svim ograničenim Borel-skupovima, za funkciju F definiranu sa

$$F(x) := \begin{cases} \mu((0, x]), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\mu((x, 0]), & x < 0. \end{cases}$$

imamo da je F rastuća i neprekidna zdesna, i $\mu = \mu_F$.

Napomena. Upotpunjenje $\bar{\mu}_F$ mjere μ_F na σ -algebri koja sadrži $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ se naziva Lebesgue-Stieltjesova mjera pridružena funkciji F i često se označava opet sa μ_F .

Tvrdnja 4.2.3. Vrijedi:

1. $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-0)$,
2. $\mu_F((a, b)) = F(b-0) - F(a)$,
3. $\mu_F([a, b)) = F(b-0) - F(a-0)$,
4. $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-0)$,

gdje je $F(a-0) = \lim_{x \nearrow a} F(x)$.

Dokaz. Rekli smo $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$.

(1) Pišemo $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a]$, pa

$$\mu_F(\{a\}) = \mu_F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_F((a - \frac{1}{n}, a]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(a) - F(a - \frac{1}{n})) = F(a) - F(a-0).$$

(Sve ostale tvrdnje 2.-4. slijede odavdje.)

(2) Pišemo $(a, b] = (a, b) \cup \{b\}$, pa

$$\mu_F((a, b]) = \mu_F((a, b) \cup \{b\}) = \mu_F((a, b)) + \mu_F(\{b\}) \Rightarrow F(b) - F(a) = \mu_F((a, b)) + F(b) - F(b-0)$$

Pa dobijamo $\mu_F((a, b)) = F(b-0) - F(a)$.

(3) i (4) Slijede analogno (zadaca): $[a, b] = (a, b] \cup \{a\}$ i $[a, b) = \{a\} \cup (a, b)$. □

4.3 Lebesgueova mjera

Definicija 4.3.1. Lebesgueova mjera je kompletna mjera μ_F pridružena funkciji $F(x) = x$. Označavamo¹¹ je sa m .

σ -algebri na kojoj je m kompletna nazivamo *Lebesgueovom σ -algebrom*¹² i označavaćemo je sa $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

¹¹u nekoj literaturi i sa λ

¹²Foreshadow: Dobivamo je tako što u $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dodamo nula-skupove da bi tu σ -algebri upotpunili

Teorem 4.3.1. Ako je $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, tada $E + s \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ i $rE \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ za sve $s, r \in \mathbb{R}$, gdje je

$$E + s = \{x + s : x \in E\}, \quad rE = \{rx : x \in E\}.$$

Šta više, vrijedi

$$m(E + s) = m(E), \quad m(rE) = |r| m(E).$$

Dokaz. Skica za jedan gradivni element $(a, b]$ (intuitivno, da skratimo na slučaj $E = (a, b]$):

$$(a, b] + s = (a + s, b + s], \quad m((a, b] + s) = (b + s) - (a + s) = b - a = m(E).$$

Za skaliranje, razlikujemo slučajeve prema predznaku r :

$$r(a, b] = \begin{cases} (ra, rb], & r > 0, \\ \emptyset, & r = 0, \\ [rb, ra), & r < 0. \end{cases}$$

- $r > 0$: $m(rE) = rb - ra = r(b - a) = r \cdot m(E)$.
- $r = 0$: $m(rE) = m(\emptyset) = 0 = 0 \cdot m(E)$.
- $r < 0$: $m(rE) = m([rb, ra)) = ra - rb = -r(b - a) = |r| \cdot m(E)$. □

Teorem 4.3.2. Lebesgueova mjera prebrojivog skupa je 0.

Dokaz. Iz tvrdnje o jednoelementnim skupovima s $F(x) = x$ (F nepr. i s lijeva i s desna):

$$m(\{a\}) = F(a) - F(a - 0) = a - a = 0.$$

Za prebrojiv skup $X = \biguplus_{x \in X} \{x\}$ vrijedi

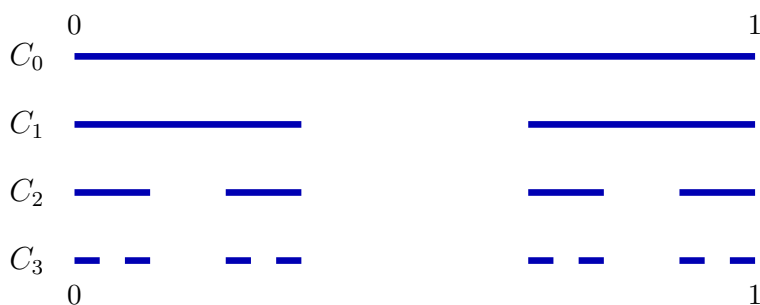
$$m(X) = m\left(\biguplus_{x \in X} \{x\}\right) = \sum_{x \in X} m(\{x\}) = 0. \quad \square$$

Napomena. Posljedica: $m(\mathbb{Q}) = 0$. Interesantno da topološki $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, a opet $m(\mathbb{Q}) = 0$.

5 Predavanje 5

5.1 Cantorov skup

Cantorov skup je skup svih tačaka koje se dobiju izbacivanjem srednje trećine svih preostalih segmenata, počevši od segmenta $[0, 1]$. Iz $[0, 1]$ izbacimo srednju trećinu bez krajnjih tačaka, tj. interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sa svakim od preostala dva segmenta učinimo isto i nastavimo isti postupak sa ostatkom.



Stavimo $I_0 = [0, 1]$, $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $I_3 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.

Vidimo da je

$$I_n = \frac{1}{3}I_{n-1} \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}I_{n-1}), \quad I_0 = [0, 1]$$

Također je $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$. Prema konstrukciji je I_n disjunktna unija 2^n , gdje je svaki dužine $\frac{1}{3^n}$.

Cantorov skup definiše se kao

$$K := \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Teorem 5.1.1. Za Cantorov skup vrijede sljedeće osobine:

1. K je zatvoren
2. $\text{Int } K = \emptyset$
3. K nema izoliranih tačaka, tj. $\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in K : y \neq x \text{ t.d. } y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.
4. $x \in K \iff x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, a_i \in \{0, 2\}$.
5. K je neprebrojiv.
6. $m(K) = 0$.

Dokaz. Mislim da smo preskočili (vidi skriptu po potrebi). □

Posljedica 5.1.2. Iz (1) i (2) prethodnog teorema slijedi da je K nigdje gust.

Posljedica 5.1.3. Iz (1) i (3) slijedi da je K savršen skup.

Vidimo da je Cantorov skup primjer neprebrojivog (nigdje gustog skupa) mjere 0. Dakle, ne mora značiti neprebrojiv skup nije mjere 0.

5.2 Izmjerive funkcije

Preslikavanja skupova gledamo na idući način: za $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ i $f : X \rightarrow Y$,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Osobine od f i f^{-1} :

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\ f(A \cap B) &\subseteq f(A) \cap f(B), \\ f(A \setminus B) &\supseteq f(A) \setminus f(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \\ f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \\ f^{-1}(A \setminus B) &= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Ljepše osobine ima f^{-1} , zato ćemo koristiti f^{-1} u definiciji izmjerive funkcije, kao što ćemo vidjeti, dosta je slično topološkoj definiciji neprekidnosti.

Dokažimo $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y \Rightarrow (x \in A : f(x) = y) \wedge (x \in B : f(x) = y) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A \cap B) \\ &\Rightarrow f(A) \cap f(B) \supseteq f(A \cap B) \end{aligned}$$

□

Pokažimo i $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \iff f(x) \in A \wedge f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

□

Za vježbu pokazati ostale osobine.

Propozicija 5.2.1. Neka data $f : X \rightarrow Y$ i neka su $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ izmjerivi prostori. Tada:

- a) $\mathcal{E} = \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$ je σ -algebra na X ,
- b) $\mathcal{F} = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ je σ -algebra na Y .

Dokaz. a)

i) Neka $A \in \mathcal{E}$, tada $\exists E \in \mathcal{N}$ t.d. $f^{-1}(E) = A$. Tada

$$A^c = X \setminus A = X \setminus f^{-1}(E) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(E) = f^{-1}(Y \setminus E) = f^{-1}(\underbrace{E^c}_{\substack{\in \mathcal{N} \\ \in \mathcal{E}}}),$$

dakle $A^c \in \mathcal{E}$.

ii) Ako $A_i \in \mathcal{E}$, $i = 1, 2, \dots$, tada $\exists E_i \in \mathcal{N}$ t.d. $f^{-1}(E_i) = A_i$, pa

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \in \mathcal{E},$$

jer $\bigcup E_i \in \mathcal{N}$.

b) Za zadaću. □

Definicija 5.2.1 (Izmjeriva funkcija). Neka su $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ izmjerivi prostori i $f : X \rightarrow Y$ funkcija. Kažemo da je f $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -izmjeriva ako za svaki $E \in \mathcal{N}$ vrijedi $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

Propozicija 5.2.2. Ako je $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E})$, onda je $f : X \rightarrow Y$ $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -izmjeriva akko $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ za sve $E \in \mathcal{E}$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Neka je f $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -izmjeriva, to znači $\forall E \in \mathcal{N}$ vrijedi $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$. Budući da je $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E})$, vrijedi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N}$, pa $\forall E \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

$(\Leftarrow)$ Neka $\forall E \in \mathcal{E}$ vrijedi $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$. Iz prop. 4.3.1., $\mathcal{F} = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ je σ -algebra. Po pretpostavci $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, a budući da je $\mathcal{F}$ σ -algebra imamo¹³:

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \implies \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}.$$

Pa $\forall E \in \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$, tj. f je $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -izmjeriva. □

Posljedica 5.2.3.

1. Ako su X, Y metrički (top.) prostori, onda svako neprekidno preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ je $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$ -izmjerivo.
2. Ako je $f : X \rightarrow Y$ $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -izmjeriva i $g : Y \rightarrow Z$ $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ -izmjeriva, onda je kompozicija $g \circ f : X \rightarrow Z$ $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ -izmjeriva.

Definicija 5.2.2. Za $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je $\mathcal{M}$ -izmjeriva ako $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ za svako $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Napomena. Na osnovu prethodne definicije vidimo da je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue (Borel) izmjeriva ako je $(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -izmjeriva (ili $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -izmjeriva). Ako su $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-izmjerive, ne mora biti $f \circ g$ Lebesgue izmjeriva, čak i ako je g neprekidna funkcija. (Ako je $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ imamo $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, ali sve dok nije $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ništa nam ne garantuje da je $g^{-1}(f^{-1}(E)) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.)

Ukoliko je f Borel izmjeriva, tada je $f \circ g$ Lebesgue ili Borel izmjeriva ako je takva i funkcija g .

¹³po lemi 2.2.1

Propozicija 5.2.4. Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor i $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

- a) f je $\mathcal{M}$ -izmjeriva,
- b) $f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{M}$ za svako $a \in \mathbb{R}$,
- c) $f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{M}$ za svako $a \in \mathbb{R}$,
- d) $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}$ za svako $a \in \mathbb{R}$,
- e) $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$ za svako $a \in \mathbb{R}$.

(Slijedi jer $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ je generiran skupovima datih "oblika".)

Iz tvrdnji b)-d), dobijamo ekvivalentne tvrdnje b')-d'), f je $\mathcal{M}$ -izmjeriva akko:

- b') $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$ za svaki $a \in \mathbb{R}$,
- c') $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$ za svaki $a \in \mathbb{R}$,
- d') $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$ za svaki $a \in \mathbb{R}$,
- e') $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$ za svaki $a \in \mathbb{R}$.

Primjer 5.2.5. Dokazati da su sljedeće f -je izmjerive:

a) $f(x) = \chi_E(x)$, gdje je $E \subseteq \mathbb{R}$ izmjeriv skup

b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Rješenje.

$$\text{a) } f(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}.$$

Iskoristimo kriterij b') $\{x \in X : f(x) > a\}$:

- $a \geq 1 \Rightarrow \{x \in X : f(x) > a\} = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- $0 \leq a < 1 \Rightarrow \{x \in X : f(x) > a\} = E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- $a < 0 \Rightarrow \{x \in X : f(x) > a\} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

b) Zadaća.

c) a gledamo po y -osi:

- $a < 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- $a \geq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- $a > 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} = (-\infty, -a) \cup (0, \frac{1}{a}) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

(Znamo da su sve neprekidne i g.s. neprekidne f-je izmjerive.)

Gledamo nekad i funkcije

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Tada Borelovu σ -algebru označavamo sa $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, a ya $B \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ članovi od $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ su oblika $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cup \{-\infty\}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cup \{-\infty, +\infty\}$. (propozicija o karakterizaciji izmjerivih funkcija vrijedi i za ove slučajeve.)

Zadaća 5.2.6. Razmisliti zašto se izmjerivost ne može def. sa

$$\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) = a\}.$$

(tj. zašto ovo iznad ne može biti karakterizacija izmjerivosti?) *Hint:* Možemo posmatrati χ_A , pri čemu A neizmjeriv skup (radili smo primjer neizmjerivog skupa).

6 Predavanje 6

6.1 Osobine izmjerivih funkcija

Rješenje (Zadaci sa kraja prošlog predavanja). Neka je $A \subseteq [0, +\infty)$ Vitalijev neizmjeriv skup. Definišemo

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A, \\ -x, & x \in [0, +\infty) \setminus A \\ -1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$f(x) = a, a \in A \Rightarrow f(x) = a$ za $x = a$. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\} = \{a\}$
 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\} = \{-a\}$ $a = -1$, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = -1\} = (-\infty, 0)$
 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = A$, a ovo je neizmjeriv skup.
 ovo claudé iz teke protumacio: Tada za svako $a > 0$:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\} = \{a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) = -a\} = \{-a\},$$

koji su izmjerjivi (jednočlani skupovi), dok je

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq A\}$$

neizmjerjivo, pa f nije izmjeriva.

Propozicija 6.1.1. Neka su $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ izmjerive i $k \in \mathbb{R}$. Onda su $kf, f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ izmjerive, pri čemu $g \neq 0$ u slučaju dijeljenja.

Dokaz. Koristimo karakterizaciju: f je izmjeriva ako i samo ako je $\{x \in X : f(x) > a\}$ izmjeriv za sve $a \in \mathbb{R}$.

kf . Razmatramo tri slučaja.

- $k > 0$:

$$\{x \in X : kf(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > \frac{a}{k}\} - \text{izmjeriv.}$$

- $k = 0$:

$$\{x \in X : 0 \cdot f(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset, & a \geq 0, \\ X, & a < 0, \end{cases} - \text{oba izmjeriva.}$$

- $k < 0$:

$$\{x \in X : kf(x) > a\} = \{x \in X : f(x) < \frac{a}{k}\} - \text{izmjeriv (po propoziciji 5.0.3 d')}.$$

$f + g$. Dokažimo iduću jednakost

$$\overbrace{\{x \in X : f(x) + g(x) > a\}}^{=:V} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{[\{x \in X : f(x) > q\}]}_{=:H} \cap \underbrace{\{x \in X : g(x) > a - q\}}_{=:K} \quad \overbrace{\hspace{10em}}^{=:U}$$

Za $x \in X$ t.d. $f(x) + g(x) > a \iff f(x) > a - g(x)$. $\mathbb{Q}$ je gšt u $\mathbb{R}$ pa postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da $f(x) > q > a - g(x)$, odakle $g(x) > a - q$. Dakle $V \subseteq U$.

Ako $x \in U \Rightarrow \exists q_0 \in \mathbb{Q} : x \in \{x \in X : f(x) > q_0\} \cap \{x \in X : g(x) > a - q_0\}$. Tj. $f(x) > q_0 \wedge g(x) > a - q_0 \Rightarrow f(x) + g(x) > a$, odakle slijedi da je $x \in V$.

Jer su f i g izmjerive, izmjerivi su i skupovi H i K , pa je i skup U kao prebrojiva unija njihovih presjeka izmjeriv skup. S obzirom da $V = U$, imamo da je $f + g$ izmjeriva.

fg . Pokažimo prvo da vrijedi f izmjeriva $\Rightarrow f^2$ izmjeriva.

$a < 0$: $\{x \in X : f^2(x) > a\} = X$ što je izmjeriv skup.

$a \geq 0$: $\{x \in X : f^2(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\}$ -izmjeriv.

Dakle f^2 je izmjeriva.

Koristimo algebarski identitet

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

pa iz prethodno dokazanog je fg izmjeriva.

$1/g$. Uraditi za zadaću:

Zadaća 6.1.2. Pokazati da je $\{x \in X : 1/g(x) > a\}$ izmjeriv (uz $g \neq 0$).

□

Propozicija 6.1.3. Neka su $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ izmjerive. Tada su $|f|$, $\max\{f, g\}$ i $\min\{f, g\}$ izmjerive. (Vrijedi i za $\overline{\mathbb{R}}$.)

Dokaz.

$$\{x \in X : \max\{f, g\}(x) > a\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) > a\}}_{\text{izmjeriv}} \cup \underbrace{\{x \in X : g(x) > a\}}_{\text{izmjeriv}},$$

$$\{x \in X : \min\{f, g\}(x) > a\} = \overbrace{\{x \in X : f(x) > a\}}^{\text{izmjerivo}} \cap \overbrace{\{x \in X : g(x) > a\}}^{\text{izmjerivo}}$$

pa oboje izmjerjivo, dakle $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ izmjerivi.

$|f| = \max\{f, 0\} - \min\{f, 0\}$ pa tvrdnja odmah slijedi i za $|f|$.

□

Napomena. Oznaka $\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\right)$ znači $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$.

Propozicija 6.1.4. Ako $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ niz izmjerivih funkcija onda su $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ izmjerive funkcije.

Ako $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ postoji $\forall x \in X$ (ili g.s.), onda je f izmjeriva funkcija.

Dokaz. Za $a \in \mathbb{R}$ želimo da dokažemo iduće jednakosti:

$$\{x \in X : \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > a\}$$

$$\{x \in X : \left(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \geq a\}$$

$$\limsup f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{\left(\sup_{k \geq n} f_k(x)\right)}^{\substack{\text{izmjerivo} \\ g_n(x) \text{ izmjeriva}}}$$

$$\liminf f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right)}_{h_n(x) \text{ izmjeriva}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{izmjerivo}}$$

I ako $\lim f_n(x)$ postoji onda se $\limsup$ i $\liminf$ podudaraju, pa imamo i da je taj limes (f) izmjeriva. $\square$

Definicija 6.1.1. Za $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definišemo *pozitivni i negativni dio*:

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \geq 0, \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} \geq 0.$$

Vrijedi:

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Pa slijedi: f izmjeriva $\Rightarrow f^+, f^-, |f|$ izmjerjive.

Napomena. $|f|$ izmjeriva ne implicira da je f izmjeriva! Na primjer, neka A neizmjeriv skup

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ -1, & x \in [0, 1] \setminus A, \end{cases}$$

pa imamo $\{q \in X : f(x) > 0\} = A$ i $|f(x)| \equiv 1$ na $[0, 1]$, tj. dobijemo da je A izmjeriv skup, kontradikcija.

Kompleksna funkcija f je izmjeriva akko su $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ izmjerive.

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f \quad \text{izmj.}, \\ |f|^2 &= f \cdot \bar{f} \quad \text{izmj.}, \\ |f| &= \sqrt{f \cdot \bar{f}} \quad \text{izmj.} \end{aligned}$$

Definišemo i $\operatorname{sgn} z = z/|z|$ za $z \neq 0$ i $\operatorname{sgn} 0 = 0$, pa je $f = \operatorname{sgn} f \cdot |f|$, odakle je $\operatorname{sgn} f$ izmjeriva funkcija.

6.2 Jednostavne funkcije

Podsjetimo se definicije karakteristične funkcije skupa $E \subseteq X$: *Karakteristična funkcija* skupa $E \subseteq X$ je

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Definicija 6.2.1. *Jednostavna funkcija* je konačna linearna kombinacija karakterističnih funkcija izmjerivih skupova sa koeficijentima iz $\mathbb{C}$. (Jednostavnim funkcijama ne dopuštamo da primaju vrijednost ∞ .)

Definicija 6.2.2 (Ekvivalentna definicija). $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ je *jednostavna* akko je f izmjeriva i skup vrijednosti od f je konačan.

Ekvivalentnost slijedi iz reprezentacije: ako su $y_1, \dots, y_n$ sve vrijednosti od f i $E_i = \{x \in X : f(x) = y_i\}$, tada

$$f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{E_i}.$$

što je lin. komb. karakterističnih funkcija izmjerivih skupova.

Definicija 6.2.3 (Standardni prikaz jednostavne funkcije). Za jednostavnu f s $R_f = \{a_1, \dots, a_n\}$ (sve različite vrijednosti) definišemo $E_j = f^{-1}(\{a_j\})$ i pišemo

$$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}.$$

Skupovi E_j su tada međusobno disjunktni i njihova unija je X .

Standardni prikaz nam je bitan jer ćemo uskoro integral definisati prvo za jednostavne funkcije, i to u standardnom prikazu.

Propozicija 6.2.1. Ako su f i g jednostavne, onda su i $f + g$ i $f \cdot g$ jednostavne.

Dokaz. Preskačemo.

□

7 Predavanje 7

7.1 Teorem o aproksimaciji

Teorem 7.1.1 (Teorem o aproksimaciji). Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor.

- a) Ako je $f : X \rightarrow [0, \infty]$ izmjeriva funkcija, onda postoji niz $\{\varphi_n\}$ jednostavnih funkcija t.d. je $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq f$ i $\varphi_n \rightarrow f$ po tačkama i $\varphi_n \rightrightarrows f$ na svakom skupu na kojem je f ograničen.
- b) Ako je $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ izmjeriva onda postoji niz $\{\varphi_n\}$ jednostavnih funkcija t.d. je $0 \leq |\varphi_1| \leq |\varphi_2| \leq \dots \leq |f|$ i $\varphi_n \rightarrow f$ po tačkama i $\varphi_n \rightrightarrows f$ na svakom skupu na kojem je f ograničena.

Dokaz.

- a) Neka je $f : X \rightarrow [0, \infty]$ izmjeriva funkcija. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ i stavimo $F_n := \{x \in X : f(x) \geq 2^n\} = f^{-1}([2^n, \infty])$. Za $x \in F_n$ funkciju f aproksimirajmo sa $2^n \chi_{F_n}(x)$. Dalje je $F_n^c = \{x \in X : 0 \leq f(x) < 2^n\} = f^{-1}([0, 2^n])$. Podijelimo $[0, 2^n)$ na manje intervale dužine $\frac{1}{2^n}$, imamo ih 2^{2n} , tj.

$$[0, 2^n] = \bigcup_{k=0}^{2^{2n}-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right).$$

Definirajmo

$$E_{n,k} := \left\{ x \in X : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right\} = f^{-1} \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right).$$

Pošto je f izmjeriva funkcija i skupovi $E_{n,k}$ su izmjerivi. Funkciju f na $E_{n,k}$ aproksimirajmo sa $\frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}}(x)$. Sada je

$$X = \left(\bigcup_{k=0}^{2^{2n}-1} E_{n,k} \right) \uplus F_n,$$

i posmatrajmo niz jednakosti funkcija

$$\varphi_n = \left(\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} \right) + 2^n \chi_{F_n}.$$

Jasno je da je $\varphi_n \geq 0$. Pokažimo da $\varphi_n \rightarrow f$ po tačkama. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka. Ako je $f(x) < \infty$, onda $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $f(x) \leq 2^{n_0} \Rightarrow f(x) < 2^n, \forall n > n_0$, pa

$$x \in F_n^c, \forall n > n_0 \xrightarrow{*} |f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n}, \forall n > n_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

$\star$: jer u tom slučaju $x \in E_{n,k}$ za neki k pa je $f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$, $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$ i slijedi $|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n}$. Ako je $f(x) = +\infty$, onda $\forall n$ je $f(x) > 2^n$, pa $x \in F_n, \forall n \Rightarrow \varphi_n(x) = 2^n \nearrow +\infty = f(x)$ kad $n \rightarrow \infty$, pa je opet $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

Pokažimo sada da na skupovima na kojima je f ograničena imamo uniformnu konvergenciju. Neka je

$$A = \{x \in X : \exists M > 0 : 0 \leq f(x) \leq M\}$$

Tada $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $M < 2^{n_0} \Rightarrow f(x) < 2^{n_0}, \forall x \in A \Rightarrow x \in F_n^c, \forall n \geq n_0, \forall x \in A$, iz čega dalje slijedi $|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n}, \forall x \in A, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \varphi_n \rightrightarrows f$ na A kad $n \rightarrow \infty$.

Pokažimo sada da je $\{\varphi_n\}$ rastući.

(I) Ako $x \in F_n \Rightarrow \varphi_n(x) = 2^n, F_n = F_{n+1} \uplus (F_n \setminus F_{n+1})$ pa $x \in F_{n+1} \vee x \in F_n \setminus F_{n+1}$.

Ako $x \in F_{n+1} \Rightarrow \varphi_{n+1}(x) = 2^{n+1} > 2^n = \varphi_n(x)$.

Ako $x \in F_n \setminus F_{n+1} \Rightarrow 2^n \leq f(x) < 2^{n+1}$ i $x \in E_{n+1, 2^{2n+1}} \uplus \dots \uplus E_{n+1, 2^{2n+2}-1}$, pa je $\varphi_{n+1}(x) \geq 2^n = \varphi_n(x)$.

Dakle za $x \in F_n$ je $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$.

(II) $x \in F_n^c \Rightarrow x \in E_{n,k}$ za neko $k \in \{0, 1, \dots, 2^{2n} - 1\}$.

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right) \uplus \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right)$$

Pa je $E_{n,k} = E_{n+1, 2k} \uplus E_{n+1, 2k+1}$ pa je

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n}, & x \in E_{n+1, 2k} \\ \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, & x \in E_{n+1, 2k+1} \end{cases}$$

pa vrijedi da je $\frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} \Rightarrow \varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$ za $x \in F_n^c$.

Dakle, $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n, \forall n$ i niz $\{\varphi_n\}$ je neopadajući niz jednostavnih funkcija koje po tačkama konvergiraju ka f .

- b) Ako je $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, onda možemo pisati $f = g + ih$, pri čemu su g i h realne funkcije. Neka su $g = g^+ - g^-, h = h^+ - h^-$, pri čemu su g^+, g^-, h^+, h^- nenegativne realne f-je. Tada po postoje $\xi_n^+, \xi_n^-, \phi_n^+, \phi_n^-$ t.d. $\xi_n^+ \nearrow g^+, \xi_n^- \nearrow g^-, \phi_n^+ \nearrow h^+, \phi_n^- \nearrow h^-$. Stavimo sada

$$\varphi_n = \xi_n^+ - \xi_n^- + i(\phi_n^+ - \phi_n^-).$$

Tada je

$$\begin{aligned} |\varphi_n| &= \sqrt{(\operatorname{Re} \varphi_n)^2 + (\operatorname{Im} \varphi_n)^2} = \sqrt{|\operatorname{Re} \varphi_n|^2 + |\operatorname{Im} \varphi_n|^2} = \sqrt{(\xi_n^+ - \xi_n^-)^2 + (\phi_n^+ - \phi_n^-)^2} \\ &\leq \sqrt{(\xi_{n+1}^+ - \xi_{n+1}^-)^2 + (\phi_{n+1}^+ - \phi_{n+1}^-)^2} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re} \varphi_{n+1})^2 + (\operatorname{Im} \varphi_{n+1})^2} \\ &= |\varphi_{n+1}|. \end{aligned}$$

Dakle, $|\varphi_n| \leq |\varphi_{n+1}|$. Ostalo lako slijedi iz prethodnog. □

Ako je μ mjera na $(X, \mathcal{M})$, ponekad želimo isključiti μ -nula skupove iz proučavanja izmjerivih funkcija. To je lakše učiniti ako je mjera μ kompletna (potpuna).

Teorem 7.1.2. Sljedeće implikacije vrijede ako je μ potpuna.

- Ako je f izmjeriva i $f = g$ μ -g.s., onda je g izmjeriva.
- Ako f_n izmjerive $\forall n$ i $f_n \rightarrow f$ μ -g.s., onda je f izmjeriva.

Dokaz. Preskačemo. □

7.2 Integracija nenegativnih izmjerivih funkcija

Neka je $(X, \mathcal{M})$ izmjeriv prostor, $L^+(X) = \{f : X \rightarrow [0, +\infty) : f \text{ izmjeriva}\}$.

Definicija 7.2.1. Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere, $\varphi \in L^+$ jednostavna funkcija, čiji je standardni prikaz dat sa $\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$. Tada se integral funkcije φ na X u odnosu na μ definiše sa

$$\int_X \varphi d\mu := \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

Za $A \in \mathcal{M}$ taj integral onda definišemo sa

$$\int_A \varphi d\mu := \int_X \varphi \chi_A d\mu.$$

Propozicija 7.2.1. Neka $\varphi, \psi \in L^+(X)$ jednostavna funkcija na $(X, \mathcal{M})$, tada vrijede sljedeće osobine integrala:

- a. $\int_X c\varphi d\mu = c \int_X \varphi d\mu$ za $c \geq 0$.
- b. $\int_X (\varphi + \psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu$ za $c \geq 0$
- c. Ako $\varphi \leq \psi$, onda je $\int_X \varphi d\mu \leq \int_X \psi d\mu$

Dokaz. a. Skica dokaza: $c \geq 0 \Rightarrow ca_j \geq 0$ (jer $a_j > 0$. Može biti $a_j = 0$, ali će biti samo za jedno j). Pa

$$c\varphi = \sum_{j=1}^n ca_j \chi_{E_j} \Rightarrow \int_X c\varphi d\mu = \dots = c \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} = c \int_X \varphi d\mu.$$

Za $c = 0$ trivijalno.

- b. (Ne gledati ovaj dokaz u skripti) Neka su ϕ i ψ date u svojim standardnim reprezentacijama:

$$\varphi := \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}, \quad \psi := \sum_{i=1}^n b_i \chi_{F_i}.$$

Onda vrijedi $E_j = \bigcup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)$, $F_k = \bigcup_{j=1}^n (E_j \cap F_k)$, jer $\biguplus_{j=1}^n E_j = \biguplus_{k=1}^n F_k = X$, i ove unije su disjunktne. Pa iz konačne aditivnosti μ slijedi

$$\int_X \varphi + \int_X \psi = \sum_{j,k} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) = \int_X (\varphi + \psi).$$

Dalje, ako $\varphi \leq \psi$, onda $a_j \leq b_k$ kad god $E_j \cap F_k \neq \emptyset$, pa

$$\int_X \varphi = \sum_{j,k} a_j \mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j,k} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \int_X \psi.$$

□

Lema 7.2.2. Neka je φ jednostavna nenegativna funkcija. Za svako $E \in \mathcal{M}$ definirajmo

$$\nu E := \int_E \varphi d\mu.$$

Tada je ν mjera na $(X, \mathcal{M})$.

Dokaz. Posmatramo slučajeve $A = \emptyset$ i $A \neq \emptyset$.

- $\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} \varphi d\mu = \int_X \varphi \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 = \int_X \chi_X d\mu = 0 \cdot \mu X = 0$
- Neka $A_j \in \mathcal{M}$ međusobno disjunktni, i $A := \biguplus A_j$. Tada

$$\begin{aligned} \nu A &= \int_A \varphi d\mu = \int_X \varphi \chi_A d\mu = \int_X \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \chi_A d\mu = \int_X \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_j \cap A} d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \int_X \chi_{E_j \cap A} d\mu \\ &= \int_X \chi_{E_j \cap A} d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j \cap A) = \sum_j a_j \mu \left(E_j \cap \biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{j=1}^n a_j \mu \left(\biguplus_{i=1}^{\infty} (E_j \cap A_i) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_i a_j \mu(E_j \cap A_i) = \sum \int \varphi \chi_{A_i} d\mu = \sum_{A_i} \int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu A_i \\ &= \nu \left(\biguplus A_i \right) \end{aligned}$$

Pa je ν mjera.

Primjetimo da smo koristili $\varphi = \sum a_j \chi_{E_j}$, $\varphi \cdot \chi_{A_i} = \sum \dots$

□

8 Predavanje 8

8.1 Teorem monotone konvergencije (TMK)

Teorem 8.1.1 (TMK-Teorem monotone konvergencije). Neka je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neopadajući niz funkcija iz $L^+(X)$, tj. $f_n \leq f_{n+1}$ i $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Tada je

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Kako je $f_n \leq f_{n+1} \leq f \Rightarrow \int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$. Pa postoji (konačan ili beskonačan) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ i vrijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Dokažimo sada obrnutu nejednakost. Uzmimo fixiran $\alpha \in (0, 1)$ i neka je φ jednostavna nenegativna f-ja t.d. je $\varphi \leq f$. Definirajmo skupove $E_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\}$. Tada je $E_n \subset E_{n+1}$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. Vrijedi $f_n \nearrow f$. Imamo:

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu = \int_X f_n \chi_{E_n} d\mu \geq \alpha \int_X \varphi \chi_{E_n} d\mu \stackrel{??}{=} \alpha \nu(E_n).$$

Prema lemi 7.2.2 i osobini mjere (neprekidnost u odnosu na rastuće unije) imamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \nu E_n = \alpha \nu X = \alpha \int_X \varphi d\mu.$$

Dakle, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \alpha \int_X \varphi d\mu$ za bilo koje $0 < \alpha < 1$. Odavde je $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \varphi d\mu$. Uzi-
majući supremum po $0 \leq \varphi \leq f$ dobijemo $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$. Ove i obrnute nejednakosti
daju traženu jednakost. $\square$

Propozicija 8.1.2. Ako su $f, g \in L^+(X)$, onda je $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

Dokaz. Prema teoremu o aproksimaciji postoje nizovi nenegativnih jednostavnih funkcija $\{\varphi_n\}$ i $\{\psi_n\}$ t.d. $\varphi_n \nearrow f$ i $\psi_n \nearrow g$. Tada $\varphi + \psi_n \nearrow f + g$, pa na osnovu TMK i aditivnosti integrala jednostavnih funkcija slijedi

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \psi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \int_X (f + g) d\mu.$$

$\square$

Posljedica 8.1.3. Neka je $\{f_n\}$ konačan ili beskonačan niz funkcija iz $L^+(X)$ i $f = \sum_n f_n$. Tada je

$$\int_X f d\mu = \sum_n \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Na osnovu propozicije iznad, koristeći indukciju, vidimo da je

$$\int_X \sum_{n=1}^N f_n d\mu = \sum_{n=1}^N \int_X f_n d\mu$$

za bilo koje konačno N . Puštajući $N \rightarrow \infty$ dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{n=1}^N f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Sada koristeći TMK imamo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{n=1}^N f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_n d\mu = \int_X f d\mu$, pa je $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$, tj. $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$. $\square$

Propozicija 8.1.4. Neka je $f \in L^+(X)$. Tada je $\int_X f d\mu = 0$ akko je $f = 0$ g.s. na X .

Dokaz. Ptp. da je $f = 0$ μ -g.s. na X i $0 \leq \varphi \leq f$, gdje je φ jednostavna f-ja. Ako je $\varphi(x) = a_k \geq 0$ na nekom skupu A_k onda je $f \geq a_k \geq 0$ na A_k pa je stoga $\mu A_k = 0$. Tada je $\int_X \varphi d\mu = 0$ pa i $\sup \int_X \varphi d\mu = 0 \Rightarrow \int_X f d\mu = 0$.

Obrnuto, ptp. da je $\int f d\mu = 0$. Neka je $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$. Tada je $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, pa ako nije $f(x) = 0$ g.s., onda mora biti $\mu E_n > 0$ za neki n . No, $f > \frac{1}{n}\chi_{E_n}$, pa je $\int f d\mu \geq \frac{1}{n} \int_X \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) > 0$. Kontradikcija. $\square$

Posljedica 8.1.5. Neka je $(f_n) \subset L^+(X)$, $f \in L^+(X)$ i $f_n \nearrow f$ g.s. na X . Tada je

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Neka $f_n \nearrow f$ za $x \in E$, pri čemu je $\mu E^c = 0$. Tada je $f - f\chi_E = 0$ g.s. i $f_n - f\chi_E = 0$ g.s. pa imamo da je

$$\begin{aligned} \int_X (f - f\chi_E) d\mu &= 0 \Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu \\ \int_X (f_n - f_n\chi_E) d\mu &= 0 \Rightarrow \int_X f_n d\mu = \int_X f_n\chi_E d\mu \end{aligned}$$

Pa je

$$\int_X f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu = \int_E f d\mu \stackrel{TMK}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n\chi_E d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

$\square$

Zadaća:

- Naći primjer da TMK ne važi ako posmatramo nenegativne izmjerive f-je f_n t.d. one monotonno opadaju ka f .
- Dokazati da ako $(f_n) \subset L^+(X)$, $f_n \searrow f$ po tačkama na X i $\int f_n d\mu < \infty$, onda je

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Lema 8.1.6 (Fatouova lema). Ako je $\{f_n\}$ niz funkcija iz $L^+(X)$, onda je

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Neka je $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$. Kako k raste, sužava se skup po kojem tražimo infimum, pa vrijedi $g_k \leq g_{k+1}$, tj. niz (g_k) je rastući.

Za svaki $k \geq 1$ vrijedi $\inf_{n \geq k} f_n \leq f_j$ za $j \geq k$, pa je

$$\int_X \inf_{n \geq k} f_n d\mu \leq \int_X f_j d\mu \quad \text{za sve } j \geq k.$$

Slijedi

$$\int_X \inf_{n \geq k} f_n d\mu \leq \inf_{j \geq k} \int_X f_j d\mu.$$

Uzimajući limes $\lim_{k \rightarrow \infty}$ na obje strane, dalje dobijamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \inf_{n \geq k} f_n d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} \int_X f_j d\mu.$$

Sada, primjenom Teorema o monotonij konvergenciji (TMK) imamo

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\inf_{n \geq k} f_n}^{g_k} d\mu \stackrel{\text{TMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \inf_{n \geq k} f_n d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} \int_X f_j d\mu,$$

tj.

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu. \quad \square$$

Posljedica 8.1.7. Ako je $f_n, f \in L^+(X)$ i $f_n \rightarrow f$ g.s. na X , onda je

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Preskačemo. $\square$

Za zadaću: Dokazati $f \in L^+(X)$ i $\int f d\mu < +\infty \implies \mu(\{x : f(x) = +\infty\}) = 0$ i $\{x : f(x) > 0\}$ je σ -konačan.

8.2 Integracija $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ funkcija

Neka $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Sjetimo se da smo za $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definirali $f^+, f^- : X \rightarrow [0, +\infty)$ sa $f^+ = \max\{f, 0\}$ i $f^- = \max\{-f, 0\}$, i primjetili smo jednakosti

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-,$$

kao i da je f izmjeriva akko su f^+ i f^- izmjerive.

Definicija 8.2.1 (Lebesgueov integral realne funkcije $f : X \rightarrow \mathbb{R}$). Ako je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija, onda Lebesgueov integral funkcije f definiramo sa

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

uz uslov da je bar jedan od integrala na desnoj strani konačan. Za f kažemo da je Lebesgue integrabilna, ako su oba $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$ konačni.

Iz pomenute opservacije da $|f| = f^+ + f^-$ dobijemo i tvrdnju da je f Lebesgue integrabilna akko je $|f|$ L. integrabilna, tj. akko je $\int_X |f| d\mu < +\infty$.

Propozicija 8.2.1. Ako f, g integrabilne, tada vrijedi

- a) $\int k f d\mu = k \int f d\mu, \forall k \in \mathbb{R}$
- b) $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$
- c) $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ ako $f \leq g$
- d) $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$

Dokaz.

- a) Razmatramo slučajeve po predznaku k .

$$k = 0 \dots$$

$$k > 0 \implies (kf)^+ = kf^+.$$

$$k < 0 \implies kf = kf^+ - kf^- = -kf^- - \underbrace{(-kf^+)}_{>0} \implies (kf)^+ = -kf^-, (kf)^- = -kf^+, \dots$$

- b) Neka je $h = f + g$, gdje je $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, $h = h^+ - h^-$. Imamo

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Ne mora značiti da je $h^+ = f^+ + g^+$, ali sigurno imamo da vrijedi:

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-.$$

Integrirajući jednakost iznad dobijamo:

$$\begin{aligned} \int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu, \\ \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu, \end{aligned}$$

Odakle slijedi

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

- c) $f \leq g \implies g - f \geq 0$, pa je

$$\int (g - f) d\mu \geq 0 \implies \int g d\mu - \int f d\mu \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \int g d\mu \geq \int f d\mu.$$

- d)

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \leq \left| \int_X f^+ d\mu \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right| = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu. \quad \square$$

Posljedica 8.2.2. Skup integrabilnih Realnih funkcija na X je Realan vektorski prostor, a $\int$ je linearan funkcional na tom prostoru.

Definicija 8.2.2. Za izmjerivu $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je integrabilna ako je

$$\int_X |f| d\mu < +\infty.$$

Kažemo da je integrabilna na izmjerivom skupu $E \in \mathcal{M}$ ako je

$$\int_E |f| d\mu < +\infty.$$

Može se pokazati: $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ je integrabilna akko su $\operatorname{Re}(f)$ i $\operatorname{Im}(f)$ integrabilne funkcije.

Definicija 8.2.3. Za $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ definirajmo Lebesgueov integral sa

$$\int_X f d\mu = \int_X \operatorname{Re} f d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f d\mu.$$

MSP: Prostor integrabilnih Kompleksnih funkcija je Kompleksan vektorski prostor.

Prostore integrabilnih funkcija označavamo sa jednom od idućih oznaka, u zavisnosti od konteksta:

$$L^1(\mu), L^1(X), L^1(X, \mu).$$

Propozicija 8.2.3. Ako $f \in L^1(X)$, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, onda je

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Dokaz. Ako je $\int_X f d\mu = 0$, tvrdnja slijedi trivijalno.

Pretpostavimo $\int f d\mu \neq 0$. Stavimo

$$\alpha = \frac{\overline{\int f d\mu}}{\left| \int f d\mu \right|}.$$

α je dobro definisano jer je f integrabilna; dakle α je broj.

$$\left| \int f d\mu \right|^2 = \int f d\mu \cdot \overline{\int f d\mu} = \alpha \int f d\mu \cdot \left| \int f d\mu \right|,$$

pa je

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \alpha \int_X f d\mu = \int_X \alpha f d\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re}(\alpha f) d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(\alpha f) d\mu \\ &\leq \int_X |\operatorname{Re}(\alpha f)| d\mu \\ &\leq \int_X |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu = \int_X |f| d\mu. \end{aligned}$$

Pri čemu u zadnjoj jednakosti koristimo

$$|\alpha| = \alpha \bar{\alpha} = \frac{\overline{\int f d\mu}}{\left| \int f d\mu \right|} \cdot \frac{\int f d\mu}{\left| \int f d\mu \right|} = \frac{\left| \int f d\mu \right|^2}{\left| \int f d\mu \right|^2} = 1.$$

□

Propozicija 8.2.4. Ako su $f, g \in L^1(X)$ onda je $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$, za svako $E \in \mathcal{M}$ akko $\int |f - g| d\mu = 0$ akko $f = g$ g.s.

Dokaz. $(\Rightarrow) : f = g$ g.s. $\Rightarrow f - g = 0$ g.s. $\Rightarrow |f - g| = 0$ g.s. $\Rightarrow \int_X |f - g| d\mu = 0$.

Tada je

$$\left| \int_E f d\mu - \int_E g d\mu \right| = \left| \int_E (f - g) d\mu \right| \leq \int_E |f - g| d\mu = 0,$$

pa je $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

$(\Leftarrow)$: Pretpostavimo $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$, i pretpostavimo da nije $f = g$ g.s.

Neka je $u = \operatorname{Re}(f - g)$, $v = \operatorname{Im}(f - g)$, oboje realne funkcije. Vrijedi $u = u^+ - u^-$, $v = v^+ - v^-$, pa je bar jedna od u^+, u^-, v^+, v^- pozitivna na skupu pozitivne mjere.

B.u.o., neka je to u^+ i stavimo $E = \{x : u^+(x) > 0\}$, tada je $\mu(E) > 0$. Sad imamo

$$\operatorname{Re} \left(\int_E f d\mu - \int_E g d\mu \right) = \int_E u^+ d\mu > 0 \quad (\text{jer je } u^- = 0 \text{ na } E),$$

što daje $\int_E f d\mu \neq \int_E g d\mu$ – kontradikcija. □

Ovo nam govori da ako je $f = g$ gotovo svuda, onda f i g možemo "poistovjetiti" za naše potrebe, i u nastavku ćemo tako i raditi.

Teorem 8.2.5 (LTDK-Lebesgueov teorem dominirane konvergencije). Neka je $\{f_n\}$ niz funkcija iz $L^1(\mu)$, i neka vrijede:

a) $f_n \rightarrow f, \mu$ g.s.

b) Postoji nenegativna funkcija $g \in L^1(\mu)$ t.d. $|f_n| \leq g$ g.s. i $\forall n$,

tada je $f \in L^1(\mu)$ i $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.

Dokaz. Iz $|f_n| \leq g$ g.s. za sve n slijedi

$$|f| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| \leq g \quad \text{g.s.} \Rightarrow \int |f| d\mu \leq \int g d\mu < \infty \Rightarrow f \in L^1(\mu).$$

Iz $|f_n| \leq g$ g.s. slijedi $-g \leq f_n \leq g$ g.s., tj.

$$g + f_n \geq 0 \quad \text{g.s.}, \quad \text{i} \quad g - f_n \geq 0 \quad \text{g.s.}$$

Primijenimo Fatouovu lemu na oba niza:

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g + f_n) d\mu = \int g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu, \\ \int g d\mu - \int f d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g - f_n) d\mu = \int g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Odakle slijedi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu,$$

što znači da limes postoji i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu. \quad \square$$

Posljedica 8.2.6. Neka $f_n \in L^1(\mu), \forall n$, t.d. $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira g.s. ka funkciji $L^1(\mu)$ i vrijedi da je $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu \right) = \sum \int f_n d\mu$.

Dokaz. Preskačemo. $\square$

Teorem 8.2.7 (O gustoći jednostavnih neprekidnih funkcija u L_1). Ako $f \in L^1(\mu)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno, onda postoji jednostavna funkcija $\varphi \in L^1(\mu)$ t.d. $\int |f - \varphi| d\mu < \varepsilon$.

Ako μ Lebesgueova mjera, onda postoji neprekidna funkcija g t.d. $g = 0$ van ograničenog intervala, t.d. $\int |f - g| d\mu < \varepsilon$.

Teorem 8.2.8 (O prelasku na limes i diferenciranje po parametru pod znakom integrala). Neka je $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrabilna funkcija $\forall t \in [a, b]$. Označimo sa F funkciju

$$F(t) = \int_X f(x, t) dx.$$

a) Ptp. da $\exists g \in L(\mu)$ t.d. je $|f(x, t)| \leq g(x)$ g.s. za $x \in X$ i $\forall t \in [a, b]$. Tada vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0) \text{ za sve } x \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0),$$

drugim riječima:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(x, t) dx = \int_X f(x, t_0) dx.$$

Specijalno, ako je $f(x, \cdot)$ neprekidna $\forall x$, onda je F neprekidna.

b) Ptp. da $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$ i $\exists g \in L^1(\mu)$ takva da je $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$ g.s. za $x \in X$ i $\forall t \in [a, b]$. Tada je F diferencijabilna f-ja i vrijedi

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Dokaz.

a) $t \rightarrow t_0 \iff \forall \{t_n\} t_n \rightarrow t_0, n \rightarrow \infty, f_n(x) = f(x, t_n)$, tada $f_n(x) \rightarrow f(x, t_0)$ kad $n \rightarrow \infty$ i $|f_n(x)| \leq g(x)$ g.s. za $x \in X$.

$$\text{LTDK} \Rightarrow \int_X f(x, t_0) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x, t_n) dx = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(x, t) dx$$

b) Ponovo LTK:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x), h_n(x) := \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}$$

pri čemu je t_n pozitivan niz t.d. $t_n \rightarrow t_0$.

□

9 Predavanje 9

9.1 Poređenje Riemannovog i Lebesgueovog integrala

U analizama smo se do sad susretali sa dvije ekvivalentne definicije Riemann integrabilnosti:

1. Pomoću gornje i donje Darbouxove sume
2. Pomoću Riemannove sume

U Analizi 2 su rađene klase integrabilnih funkcija na $[a, b]$ pri čemu je f ograničena na $[a, b]$, i imali smo rezultate:

- f neprekidna $\Rightarrow f$ je R-integrabilna.
- f ima prebrojivo mnogo tč. prekida $\Rightarrow f$ je R-int.
- f ima tačke prekida i skup tačaka prekida je Jordanove mjere 0 $\Rightarrow f$ R-int¹⁴.

Osvrnimo se sada na vezu između Riemannovog i Lebesgueovog integrala.

Teorem 9.1.1. Neka je f ograničena funkcija na $[a, b]$.

- a) Ako je f R-int. na $[a, b]$ onda je ona i Lebesgue izmjeriva i int. na $[a, b]$ (jer je ogr.). I vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx.$$

- b) (*Lebesgueov kriterij R-integrabilnosti*) Funkcija f je R-int. akko je skup tačaka prekida Lebesgueove mjere 0.

Dokaz.

- a) Vidjeti u materijalima
- b) Preskaćemo.

□

Primjer 9.1.2. Ispitati R. i L. int. date funkcije f .

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in I \cap [0, 1] \end{cases}$$

Rješenje. Ova f -ja ima prekid u svakoj tacki iz $[0, 1]$ i $m([0, 1]) = 1$ pa ona nije R-int. na $[0, 1]$. Ali $f(x) = 0$ g.s. na $[0, 1]$ (jer je $m(\mathbb{Q} \cap [a, b]) = 0$) jer je

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = \int_{[0,1]} 0dx = 0 \cdot m([0, 1]).$$

Tj. Riemannov $\int_0^1 f(x)dx$ ne postoji, ali Lebesgueov $\int_{[0,1]} f(x)dx$ postoji i jednak je 0. □

¹⁴Za više vidjeti literaturu, prof. Vajzović, prof. Malenica

Primjer 9.1.3. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n}, \text{ na } [0, 1], n \in N, \text{ tj. za } x \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \\ 0, & \text{inače na } [0, 1] \end{cases}$

Ispitati R. i L. int. i izračunati $\int_0^1 f(x)dx$ i $\int_{[0,1]} f(x)dx$, ako je to moguće.

Rješenje. F-ja sigurno ima prekid u tč. $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ te u tački $x = 0$, dok je u ostalim tačkama f-ja neprekidna. Dakle, skup tč. prekida f-je f je $\{0, 1, 1/2, \dots\}$, a to je prebrojiv skup i njegova mjera je 0 pa je prema Lebesgueovom kriteriju Riemann integrabilnosti funkcija f R-int. na $[0, 1]$, a prema teoremu 9.1.1. pod a) je i Lebesgue integrabilna i vrijedi

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)dx.$$

Ranije smo vidjeli da ako je $f = g$ g.s. na X onda

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu, \forall E \in \mathcal{M}, \mathcal{M} \sigma\text{-alg. nad } X.$$

tj. specijalno za $E = X$

$$f = g \text{ g.s. na } X \Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

U našem slučaju je $f = 1$ g.s. na $[0, 1]$ pa je

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = \int_{[0,1]} 1dx = m([0, 1]) = 1, \text{ pa je i } \int_0^1 f(x)dx = 1$$

□

Teorem 9.1.4. Neka je f R-int. na $[a, b]$ za $\forall b > a$ i neka je Lebesgue integrabilna na $[a, +\infty]$. Tada postoji Riemannov nesvojstveni integral na $[a, +\infty)$ i vrijedi

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{[a, +\infty]} f(x)dx.$$

Dokaz. $\forall b > a$ postoji $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \exists \int_{[a,b]} f(x)dx$. Uzmimo niz $b_n \nearrow b$ rastući i posmatrajmo niz funkcija $f_n(x) = f(x) \cdot \chi_{[a, b_n]}(x)$. Tada $f_n \nearrow f$ i $|f_n| \leq |f| \in L^1([a, +\infty])$. Sada na osnovu LTDK imamo

$$\begin{aligned} \int_{[a, +\infty]} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} f \chi_{[a, +\infty]}(x)dx \stackrel{\text{LTDK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f \chi_{[a, b_n]}(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b_n]} f(x)dx \stackrel{L^{\supset R}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x)dx \\ &= \int_a^{+\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

□

Primjedba: Prethodni thm. vrijedi i kada $[a, \infty)$ zamijenimo sa $(-\infty, a]$ ili $(-\infty, +\infty)$.

Propozicija 9.1.5.

1. Ako je $f \geq 0$ i f R-int. u nesvojstvenom smislu na $[a, +\infty)$, onda je ona i L-int. na $[a, +\infty)$ i vrijedi

$$\int_{[a, +\infty)} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

2. Ako su f i $|f|$ R-int. u nesvojstvenom smislu na $[a, +\infty)$, onda je f L-int. na $[a, +\infty)$ i vrijedi

$$\int_{[a, +\infty)} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

(I pod a) i pod b) vrijedi i u slučaju nesvojstvenog integrala II-vrste, tj. kada je f neogr. u okolini neke tč.)

Dokaz. Preskačemo. □

Primjer 9.1.6. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ postoji kao R-nesvojstveni, pokazati da $\int_{(0, +\infty)} \frac{\sin x}{x} dx$ ne postoji kao Lebesgueov integral.

Rješenje. Ako $\frac{\sin x}{x} \in L^1((0, \infty))$, onda $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \in L^1((0, \infty))$.

$$\begin{aligned} \int_{(0, \infty)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &\geq \int_{[\pi, \infty)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k\pi, (k+1)\pi)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t + k\pi)|}{t + k\pi} dt \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t + \overbrace{\cos k\pi}^{=(-1)^k} + \cos t \overbrace{\sin k\pi}^{=0}|}{(k+1)\pi} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} |\sin t| dt}_{=2} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty, \text{ jer ovaj red div.} \end{aligned}$$

Dakle, $\frac{\sin x}{x} \notin L^1((\pi, \infty))$ pa $\frac{\sin x}{x} \notin L^1((0, \infty))$.

R-int. slijedi iz Dirichletovog kriterija za R-nesv. integrale, tj. imamo

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| \leq M \quad \text{i} \quad \frac{1}{x} \searrow 0, x \rightarrow \infty.$$

A u A2 se pokazuje da malo drugačiji integral $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ ne postoji (u Riemannovom) smislu.

Primjer 9.1.7. (Iz dokumenta u fusnoti¹⁵, primjer 2.2.27*)

Neka $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ L-int. Izračunati:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-n) \frac{x}{1+|x|} dx.$$

Hint: Uvesti smjenu¹⁶ promjenljive $y = x + n$ i rastaviti integral na dva dijela: jedan na intervalu $(-n, \infty)$ i drugi na $(-\infty, -n)$. Primijeniti LTDK i dokazati da prvi integral konvergira ka 0 a drugi ka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. *Rješenje:* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \int_{(-\infty, \infty)} f(x-n) \frac{x}{1+|x|} dx &= |y = x - n, dx = dy, x = y + n| = \int_{(-\infty, \infty)} f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} dy \\ &= \int_{(-\infty, n)} f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} dy + \int_{(n, \infty)} f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} dy \end{aligned}$$

$$\int_{(-\infty, -n)} f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} dy = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} \chi_{(-\infty, -n)}(y)}_{f_n(y)} dy, \quad \text{TMK, } 0 \leq f_n \nearrow f$$

$$|f_n(y)| \leq |f(y)| \chi_{(-\infty, \infty)}(y)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \chi_{(-\infty, -n)}(y) dy \Big/ \lim_{n \rightarrow \infty}$$

Možemo uzeti limes (neprekidnost mjere, osobina **d**), dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(y)| dy \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \chi_{(-\infty, -n)}(y) dy \stackrel{\mathbf{d}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} |f(y)| \chi_{(-\infty, -n)}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} 0 dy = 0$$

Drugi sabirak:

$$\int_{(-n, \infty)} f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \underbrace{\frac{y+n}{1+|y+n|} \chi_{(-n, \infty)}(y)}_{f_n(y)} dy$$

$$|f_n(y)| \leq |f(y)| \chi_{(-n, \infty)}(y) \leq |f(y)| \in L^1((-\infty, \infty))(?), \quad \text{LTDK}$$

¹⁵https://ocw.uc3m.es/pluginfile.php/5426/mod_page/content/17/EXERCISES%20-%20Solutions.%202.2.%20Integration%20of%20general%20functions.pdf

¹⁶Mi ćemo pretpostaviti da su autori skripte sa linka napravili tipkarsku grešku, te ćemo uvesti sličnu, ali nešto drugačiju smjenu.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(-n, \infty)} f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} \chi_{(-n, \infty)}(y) dy \\
&\stackrel{\text{LTDK}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y) \frac{y+n}{1+|y+n|} \overbrace{\chi_{(-n, \infty)}(y)}^{\rightarrow \chi_{\mathbb{R}}(y)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx
\end{aligned}$$

Pa konačno dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\infty, \infty)} f(x-n) \frac{x}{1+|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

□

Primjer 9.1.8. (Zadatak sa Mathematics Stack Exchange¹⁷) Iskoristiti LTDK da se izračuna:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{n \sin(x)}{1+n^2 \sqrt{x}} dx$$

Koju "dominirajuću" funkciju iskoristiti ovdje?

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{n \sin x}{1+n^2 \sqrt{x}} \right| &\leq \frac{n}{1+n^2 \sqrt{x}} \leq \frac{1}{n \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1([0,1]) \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{n \sin x}{1+n^2 \sqrt{x}} dx &\stackrel{\text{LTDK}}{=} \int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin x}{1+n^2 \sqrt{x}} dx = \int_{[0,1]} 0 dx = 0.
\end{aligned}$$

Kraj prvog parcijalnog.

¹⁷Link: <https://math.stackexchange.com/questions/7737/lebesgue-dominated-convergence-example>

II parcijala

10 Predavanje 10

10.1 Tipovi konvergencije

Neka $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$).

Definicija 10.1.1 (Konvergencija po tačkama).

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{čim } n \geq n_0$$

Zapisujemo: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Definicija 10.1.2 (Uniformna konvergencija).

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in X) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{čim } n \geq n_0$$

Zapisujemo: $f_n \Rightarrow f$ na X .

Novi tipovi konvergencija o kojima ćemo govoriti u nastavku:

- g.s. (gotovo svuda)
- u mjeri
- u L normi

Definicija 10.1.3 (Gotovo svuda (g.s.) konvergencija). Ako

$$\mu(\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\}) = 0,$$

kažemo da f_n konvergira g.s. na X ka funkciji f .

Definicija 10.1.4 (Konvergencija u mjeri). Ako za $\forall \varepsilon > 0$ je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

kažemo da f_n konvergira u mjeri μ ka funkciji f na X i pišemo: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Za niz kažemo da je **Cauchyjev u mjeri**, ako za svako $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Definicija 10.1.5 (Konvergencija u L^1 -smislu (normi)). Ako je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0,$$

tj. $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), kažemo da f_n konvergira ka f u L^1 smislu (normi), i pišemo: $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Napomena. Unif. konv. $\implies$ konv. po tač. $\implies$ konv. g.s. Obrat ne vrijedi. Niti jedna od ovih konvergencija ne implicira L^1 , a ni obrnuto.

Primjer 10.1.1. $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ispitati konv. na $\mathbb{R}$.

(1) Po tačkama:

- Za $x \leq 0$: $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x) = \frac{1}{n} \cdot 0 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$
- Za $x > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x < n_0 \implies x \in (0, n)$ za sve $n \geq n_0$

$$\implies f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Pa vidimo: $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, tj. niz konv. po tačkama ka funkciji $f(x) \equiv 0$ na $\mathbb{R}$.

(2) Uniformna:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x) \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Dakle, $f_n \rightrightarrows f$ kad $n \rightarrow \infty$.

(3) G.s.: Slijedi iz obične konvergencije.

(4) U mjeri:

Neka $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Razmatramo:

$$\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x) \geq \varepsilon\right\}$$

Za fiksirano $\varepsilon > 0$ uvijek postoji dovoljno veliko n_0 t.d. $1/n < \varepsilon$. Za takve n je skup iznad prazan, tj.

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x) \geq \varepsilon\right\} = \emptyset \implies m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x) \geq \varepsilon\right\}\right) = 0,$$

kad $n \rightarrow \infty$, odakle slijedi $f_n \xrightarrow{m} 0$.

(5) U L^1 -smislu (normi):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x) dx \\ &= \int_{(0,n)} \frac{1}{n} dx \\ &= \frac{1}{n} \cdot \mu((0, n)) = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Iz ovog primjera vidimo da nijedan od tipova konv. (1)-(4) ne implicira (5) L^1 konvergenciju.

Primjer 10.1.2. $f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x)$

(1) Po tačkama:

$x \in \mathbb{R}$ ppf. $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > x$

Pa $x \notin (n_0, n_0 + 1)$; za sve $n \geq n_0$ vrijedi $x \notin (n, n + 1)$.

Pa $f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x) = 0 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty \implies f_n \rightarrow 0$ po tač. ($n \rightarrow \infty \implies$ konv. g.s.)

(2) Uniformna konv.:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \chi_{(n,n+1)}(x) = 1 \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\implies f_n \not\rightarrow f, \quad n \rightarrow \infty.$$

(3) U mjeri:

Neka $\varepsilon > 0$, razmatramo:

$$\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : \chi_{(n,n+1)}(x) \geq \varepsilon\} = (n, n+1),$$

odakle slijedi $m((n, n+1)) = 1 \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$

(4) L^1 norma:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n,n+1)}(x) dx = \mu((n, n+1)) = 1 \not\rightarrow 0,$$

kad $n \rightarrow \infty$, pa $f_n \not\rightarrow^{L^1} 0$.

Primjer 10.1.3. $f_n(x) = n \cdot \chi_{[0,1/n]}(x), \quad x \in \mathbb{R}$

(1) Po tačkama:

- $x < 0 \implies f_n(x) = n \cdot 0 = 0$ (za sve $n \in \mathbb{N}$)
- $x = 0 \implies n \cdot \chi_{[0,1/n]}(0) = n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty$
- $x > 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < x \implies f_n(x) = n \cdot \chi_{[0,1/n]}(x) = 0, \quad \forall n \geq n_0 \implies f_n(x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$

Pa slijedi da $f_n(x) \rightarrow 0$ g.s. na $\mathbb{R}$, jer $\mu(\{0\}) = 0$. Također $f_n \not\rightarrow 0$ (jer ne konv. obično, samo g.s.)

(4) U mjeri:

$$\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : n \cdot \chi_{[0,1/n]}(x) \geq \varepsilon\} = [0, 1/n)$$

$$\implies m(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = m([0, 1/n]) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \implies f_n \xrightarrow{m} 0.$$

(5) U L^1 smislu:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} n \cdot \chi_{[0,1/n]}(x) dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

pa $f_n \not\rightarrow^{L^1} 0$.

Primjer 10.1.4. $f_n(x) = \chi_{[j/2^k, (j+1)/2^k]}(x)$, pri čemu $n = 2^k + j, k \geq 0, 0 \leq j \leq 2^k - 1, x \in [0, 1]$.

$n \rightarrow \infty \implies k \rightarrow \infty$. Dužina datog intervala je $1/2^k$.

Prvih nekoliko funkcija (indeksi: $2^k, 2^k + 1, \dots, 2^k + 2^k - 1$):

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \chi_{[0,1]}(x) & f_5(x) = \chi_{[1/4,1/2]}(x) \\ f_2(x) = \chi_{[0,1/2]}(x) & f_6(x) = \chi_{[2/4,3/4]}(x) \\ f_3(x) = \chi_{[1/2,1]}(x) & f_7(x) = \chi_{[3/4,1]}(x) \\ f_4(x) = \chi_{[0,1/4]}(x) & \end{array}$$

Sada: $\frac{j}{2^k} \leq x \leq \frac{j+1}{2^k} \implies j \leq 2^k x < j+1 \implies j = \lfloor 2^k x \rfloor$

Primjećujemo: ako $f_n(x) = 1 \implies f_{n+1}(x) = 0$ ili $f_{n-1}(x) = 0$.

$\implies f_n(x)$ ima 2 tačke gomilanja: 0 i 1, jer:

$$x \in \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right] \text{ za beskonačno mnogo parova } j, k;$$

tj. $\forall k, \exists j : x \in [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$

$$\implies f_{2^k+j}(x) = 1 \implies f_{2^k+j-1}(x) = 0 \text{ ili } f_{2^k+j+1}(x) = 0$$

$\implies f_n(x) = 1$ za beskonačno mnogo n ; $f_n(x) = 0$ za beskonačno mnogo n .
 $\implies$ nemamo konvergenciju ni po tačkama (1), ni uniformne (2), ni g.s. (3).

(4) Po mjeri:

$$\{x \in [0, 1] : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\} = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]$$

$$\implies m\left(\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]\right) = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \text{ kad } n \rightarrow \infty \text{ (jer tad } k \rightarrow \infty), \implies f_n \xrightarrow{m} 0.$$

(5) U L^1 -smislu:

$$\int_{[0,1]} |f_n(x) - 0| dx = \int_{[0,1]} \chi_{[j/2^k, (j+1)/2^k]}(x) dx = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \text{ (jer tad } k \rightarrow \infty).$$

Napomena. Iz ovog primjera vidimo da konvergencija po mjeri i L^1 konvergencija ne impliciraju konvergenciju po tačkama, uniformnu i g.s. konvergenciju.

Propozicije o tipovima konvergencije

Propozicija 10.1.5. $f_n \xrightarrow{L^1} f \implies f_n \xrightarrow{m} f$.

Dokaz. $\varepsilon > 0$ ppf.

Posmatramo $E_{n,\varepsilon} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$.

$$\begin{aligned} \int_X |f_n(x) - f(x)| dx &\geq \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\geq \varepsilon \int_{E_{n,\varepsilon}} dx \\ &= \varepsilon m(E_{n,\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies m(E_{n,\varepsilon}) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \text{ (jer } f_n \xrightarrow{L^1} f \text{ i } \varepsilon > 0 \text{ fiksno)} \\ \implies m(E_{n,\varepsilon}) &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \implies f_n \xrightarrow{m} f. \end{aligned}$$

□

Propozicija 10.1.6. $f_n \xrightarrow{m} f$ i $f_n \xrightarrow{m} g \implies f = g$ g.s.

Dokaz.

$$\{x \in X : f \neq g\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

Primjećujemo:

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)|$$

Odakle slijedi

$$\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} \subseteq \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\} \cup \left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\},$$

pa jer $f_n \xrightarrow{m} f$ i $f_n \xrightarrow{m} g$:

$$\begin{aligned} m\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\}\right) &\rightarrow 0 \\ m\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\}\right) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\implies m(\{x \in X : f \neq g\}) = 0 \implies f = g \text{ g.s.} \quad \square$$

Propozicija 10.1.7. Neka $f_n \rightarrow f$ g.s., f_n i f izmjerive, i $m(X) < +\infty$. Tada $f_n \xrightarrow{m} f$.

Dokaz. $\varepsilon > 0$ ppf.

Posmatramo $E_{n,\varepsilon} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Stavimo $F_n = \bigcup_{j=n}^{+\infty} E_{j,\varepsilon} \Rightarrow F_{n+1} \subset F_n$ za sve n ; $F_1 \subset X$; $m(X) < \infty$.

(Koristimo osobinu za opadajuće presjeke, za to nam služi $m(X) < \infty$.)

$$\implies m(F_1) < +\infty \text{ i } m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0, \text{ jer je:}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x \in X : f_n \not\rightarrow f\}; \quad \text{ i } \quad f_n \rightarrow f \text{ g.s.}$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_{n,\varepsilon}) = 0 \implies f_n \xrightarrow{m} f. \quad \square$$

Propozicija 10.1.8. Ako je (f_n) Cauchyjev niz u mjeri izmjerivih funkcija, onda postoji izmjeriva funkcija f takva da $f_n \xrightarrow{\mu} f$, i postoji podniz (f_{n_j}) koji konvergira g.s.

Dokaz. Preskaćemo. $\square$

Napomena. U Primjeru 4. uzmimo podniz f_{2^k} . Tada $f_{2^k}(x) = \chi_{[0,1/2^k]}(x) \rightarrow 0$ g.s.. Tj. ovo je podniz koji tamo možemo izdvojiti.

Možemo zaključiti:

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \implies \exists f_{n_j} : f_{n_j} \rightarrow f \text{ g.s.}$$

Teorem 10.1.9 (Egoroff). Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor konačne mjere, i $f_n \rightarrow f$ g.s., gdje su f, f_n izmjerive.

Tada:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists E \subseteq X : \mu(E) < \varepsilon \text{ i } f_n \rightrightarrows f \text{ na } E^c.$$

Dokaz. Definirajmo $E = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\}$. Pošto $f_n \rightarrow f$ g.s. $\Rightarrow \mu(E) = 0$. B.u.o. pretpostavljamo da $f_n(x) \rightarrow f(x)$ na cijelom X .

Za $k, n \in \mathbb{N}$ definirajmo:

$$E_n(k) := \bigcup_{m=n}^{+\infty} \left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

$$\implies E_1(k) \supset E_2(k) \supset \dots \text{ pa imamo opadajući niz, i } \mu(X) < +\infty \implies \mu(E_n(k)) < +\infty \text{ za sve } k. \text{ Pa je: } \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n(k)).$$

Sada tvrdimo da $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$. Dokažimo ovo.

Pretpostavimo suprotno:

Ako $\exists x \in \bigcap E_n(k) \implies x \in E_n(k)$ za sve n , onda $|f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}$ za beskonačno mnogo m , a odatle slijedi $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$ – kontradikcija sa pretpostavkom.

Dakle: $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n(k)) = 0$.

Sada, za $\varepsilon > 0$ i $k \in \mathbb{N}$, izaberimo n_k (dovoljno veliko) t.d.:

$$\mu(E_{n_k}(k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Definirajmo: $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$, tad $\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n_k}(k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Pokažimo sada uniformnu konvergenciju na E^c , tj. da za proizvoljno $\delta > 0$ postoji $n_0 = n_0(\delta)$ t.d. $|f_n(x) - f(x)| < \delta$, čim $n \geq n_0$.

Neka $\delta > 0$ proizvoljno $\implies \exists k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} < \delta$. Stavimo $n_0 = n_k = n_0(\delta)$.

Neka $x \in E^c \implies x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^c(k) \implies x \in E_{n_k}^c(k)$ tj. $x \in \bigcap_{m=n_k}^{+\infty} \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}^c$
 $\implies |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \delta$ za sve $m \geq n_k$, $\implies f_m \rightrightarrows f$ na E^c . □

Naprimjer, za $f_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$, $f_n \rightarrow f$, f ima skok u $x = 1$.

Teorem nam daje vrstu konvergencije koja se nekad naziva: "gotovo svuda uniformna konvergencija"¹⁸.

Propozicija 10.1.10. Ako $f_n \rightarrow f$ gotovo uniformno, onda $f_n \rightarrow f$ g.s. i u mjeri.

Dokaz. Preskačemo. □

Propozicija 10.1.11. TMK vrijedi i kad se $f_n \rightarrow f$ g.s. zamijeni sa $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Dokaz. -//- □

¹⁸Almost uniform convergence. Nije teško vidjeti da ova konvergencija implicira g.s. konv. i konv. u mjeri.

11 Predavanje 11

11.1 Produkt mjere. Teorem Fubini-Tonelli

Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ prostori mjere. Na skupu $X \times Y$ definirana je *produkt σ -algebra* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ – to je najmanja σ -algebra generirana izmjerivim pravougaonima $M \times N$, gdje $M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}$.

Pretpostavimo da je $A \times B$ pravougaonik koji je konačna ili prebrojiva disjunktina unija pravougaonika $A_j \times B_j$. Tada za $x \in X$ i $y \in Y$:

$$\chi_A(x) \chi_B(y) = \chi_{A \times B}((x, y)) = \sum_j \chi_{A_j \times B_j}(x, y) = \sum_j \chi_{A_j}(x) \chi_{B_j}(y) \Big/ \int d\mu(x)$$

Integriranjem po x , a zatim i po y , dobijamo redom:

$$\begin{aligned} \mu(A) \chi_B(y) &= \int \chi_A(x) \chi_B(y) d\mu(x) = \sum_j \int \chi_{A_j}(x) \chi_{B_j}(y) d\mu(x) = \sum_j \mu(A_j) \chi_{B_j}(y) \Big/ \int d\nu(y) \\ \mu(A) \nu(B) &= \sum_j \mu(A_j) \nu(B_j). \end{aligned}$$

Neka je $\mathcal{A}$ familija svih konačnih disjunktih unija pravougaonika, tj. svih skupova oblika

$$E = A_1 \times B_1 \bigsqcup A_2 \times B_2 \bigsqcup \cdots \bigsqcup A_n \times B_n.$$

Definirajmo

$$\pi(E) := \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \nu(B_j), \quad (\text{uz dogovor } 0 \cdot \infty = 0).$$

Vidimo da je π dobro definirano na $\mathcal{A}$ (jer dvije reprezentacije od E kao konačne disjunktne unije pravougaonika imaju zajedničko profinjenje) i da je π predmjera nad $\mathcal{A}$. Prema ranijim teoremima, π generira vanjsku mjeru na $X \times Y$ čija je restrikcija na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ mjera koja produžava π . Tu mjeru zovemo *produkt mjera* μ i ν i označavamo s $\mu \times \nu$.

Ako su μ i ν σ -konačne mjere, tj. ako možemo pisati

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad \mu(A_j) < \infty, \quad \nu(B_k) < \infty \quad \forall j, k,$$

onda je $X \times Y = \bigcup_{j,k} A_j \times B_k$ i $(\mu \times \nu)(A_j \times B_k) = \mu(A_j) \nu(B_k) < +\infty$, pa je $\mu \times \nu$ σ -konačna. To implicira da je $\mu \times \nu$ jedinstven mjeru na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ takva da je $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$ za sve pravougaonike $A \times B$.

x -skupovi i y -skupovi

Za $E \subseteq X \times Y$ i $x \in X, y \in Y$ definirajmo x -skup E_x i y -skup E^y :

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Ako je f funkcija na $X \times Y$, tada definiramo

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Na primjer: $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ i $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

Propozicija 11.1.1.

- a) Ako $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, onda $E_x \in \mathcal{N}$ za sve $x \in X$ i $E^y \in \mathcal{M}$ za sve $y \in Y$.
b) Ako je $f \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -izmjeriva, onda je $f_x \mathcal{N}$ -izmjeriva za sve $x \in X$, a $f^y \mathcal{M}$ -izmjeriva za sve $y \in Y$.

Dokaz. a) Posmatramo familiju

$$\mathcal{R} = \{ E \subseteq X \times Y : E_x \in \mathcal{N} \forall x \in X, E^y \in \mathcal{M} \forall y \in Y \}.$$

$\mathcal{R}$ sadrži sve izmjerive pravougaonike $A \times B$ ($A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$), jer:

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \in A^c, \end{cases} \quad (A \times B)^y = \begin{cases} A, & y \in B, \\ \emptyset, & y \in B^c. \end{cases}$$

Pokažimo da je $\mathcal{R}$ σ -algebra.

Što se tiče unija imamo:

$$\begin{aligned} y \in \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)_x &\iff (x, y) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \iff \exists j_0 \text{ td. } (x, y) \in E_{j_0} \\ &\iff y \in (E_{j_0})_x \\ &\iff y \in \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x \\ &\implies \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)_x \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x. \quad (\blacksquare) \end{aligned}$$

S druge strane

$$\begin{aligned} y \in \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x &\implies \exists j_0 : y \in (E_{j_0})_x \implies (x, y) \in E_{j_0} \implies (x, y) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \\ &\implies y \in \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)_x \\ &\implies \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)_x, \quad (\blacksquare\blacksquare) \end{aligned}$$

dakle, iz $(\blacksquare)$ i $(\blacksquare\blacksquare)$ dobijamo $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x$.

Što se tiče komplementa imamo:

$$\begin{aligned} y \in (E^c)_x &\implies (x, y) \in E^c \implies (x, y) \notin E_x \implies y \in (E_x)^c \\ [\text{jer ako } y \in E_x &\implies (x, y) \in E, \perp.] \implies y \in (E_x)^c \\ &\implies (E^c)_x \subseteq (E_x)^c. \quad (\bullet) \end{aligned}$$

S druge strane:

$$\begin{aligned}
 y \in (E_x)^c &\implies y \notin E_x \implies (x, y) \notin E, [\text{ jer } (x, y) \in E \implies y \in E_x] \\
 &\implies (x, y) \in E^c \\
 &\implies y \in (E^c)_x \\
 &\implies (E_x)^c \subseteq (E^c)_x, (\bullet\bullet)
 \end{aligned}$$

pa iz $(\bullet)$ i $(\bullet\bullet)$ dobijamo $(E^c)_x = (E_x)^c$.

Slično vrijedi i za y -skupove. Dakle, $\mathcal{R}$ je σ -algebra koja sadrži sve izmjerive pravougaonike, pa $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}$ (jer $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ najmanja takva σ -alg. po def.).

- b) Slijedi iz (a), jer $(f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x$ i $(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y$, a $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ -izmjerivost od f daje $f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

□

Napomena. I kada su μ i ν potpune mjere, $\mu \times \nu$ obično nije. Kao primjer posmatrajmo mjeru $\mu = \nu = m$ Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}$ i neka je $A \neq \emptyset$ izmjeriv skup t.d. je $m A = 0$ i $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ (neizmjeriv skup). Tada je $A \times B \subseteq A \times \mathbb{R}$ i $\mu \times \nu(A \times \mathbb{R}) = 0$, ali $A \times B \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, prema prethodnoj propoziciji.

Monotona klasa

Definicija 11.1.1. Monotonom klasom na X zovemo familiju $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zatvorenu u odnosu na prebrojive rastuće unije i prebrojive opadajuće presjeke:

- $E_j \in \mathcal{C}, E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{C},$
- $E_j \in \mathcal{C}, E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \implies \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{C}.$

Svaka σ -algebra je monotona klasa. Presjek bilo koje familije monotonihih klasa je monotona klasa. Ako je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bilo koja familija, onda postoji najmanja monotona klasa koja sadrži $\mathcal{E}$; označavamo je s $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ i zovemo je *monotona klasa od $\mathcal{E}$* (ili monotona klasa generisana sa $\mathcal{E}$).

Lema 11.1.2. Ako je $\mathcal{A}$ algebra podskupova od X , onda je $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Dokaz. Preskačemo (vidjeti u materijalima).

□

Teorem Fubini–Tonelli

Teorem 11.1.3 (Fubini–Tonelli za karakteristične funkcije). Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ -konačni prostori mjere. Ako je $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, onda su funkcije $x \mapsto \nu(E_x)$ i $y \mapsto \mu(E^y)$ izmjerive na X i Y redom, i vrijedi:

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

Dokaz. 1° **Slučaj:** μ i ν konačne ($\mu(X) < +\infty, \nu(Y) < +\infty$).

Neka je $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} : \text{tvrdnja teorema vrijedi za } E\}$. Pokažimo da $\mathcal{C}$ sadrži sve izmjerive pravougaonike i konačne disjunktne unije izmjerivih pravougaonika.

Označimo sa $\mathcal{A}$ algebru svih konačnih disjunktne unija izmjerivih pravougaonika.

Neka je $E = A \times B$, $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$. Tada:

$$E_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A, \end{cases} \implies \nu(E_x) = \begin{cases} \nu(B), & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \implies \nu(E_x) = \nu(B) \chi_A(x),$$

što je izmjeriva funkcija jer je A izmjeriv skup. Stoga:

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_X \nu(B) \chi_A(x) d\mu(x) = \nu(B) \mu(A) = (\mu \times \nu)(E).$$

Analogno je $\mu(E^y) = \mu A \cdot \chi_B(y)$ izmjeriva f-ja, pa je

$$\int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = \int_Y \mu(A) \chi_B(y) d\nu(y) = \mu(A) \nu(B) = (\mu \times \nu)(E),$$

odakle slijedi $A \times B \in \mathcal{C}$, a zbog linearnosti integrala, $\mathcal{C}$ sadrži i konačne disjunktne unije pravougaonika, tj. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.

Pokažimo sada da je $\mathcal{C}$ monotona klasa.

Rastuće unije: Neka $E_n \in \mathcal{C}$, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$, i $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Definirajmo

$$f_n(x) := \nu((E_n)_x), \quad g_n(y) := \mu((E_n)^y);$$

ovo su izmjerive funkcije jer $E_n \in \mathcal{C}$.

Imamo

$$(\mu \times \nu)(E_n) = \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_Y g_n(y) d\nu(y),$$

i $E_n \nearrow E$, pa je

$$(\mu \times \nu)(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \times \nu)(E_n).$$

Pošto su E_n rastući, f_n i g_n su rastuće funkcije na X i Y redom, tj. $f_n \nearrow \nu(E_x)$, $g_n \nearrow \mu(E^y)$, pa kako su $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \nu(E_x)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = \mu(E^y)$ izmjerive funkcije, kao limesi izmjerivih funkcija, to prema **TMK** imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu(x) &= \int_X \nu(E_x) d\mu(x), & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y g_n d\nu(y) &= \int_Y \mu(E^y) d\nu(y), \\ \implies \int_X \nu(E_x) d\mu(x) &= \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = (\mu \times \nu)(E) \implies E \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

pa je $\mathcal{C}$ zatvoren u odnosu na rastuće unije.

Pokažimo sada da je $\mathcal{C}$ zatvoren u odnosu na opadajuće presjeke.

Opadajući presjeci:

Neka $E_n \in \mathcal{C}$ t.d. $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ i stavimo $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

$$f_n(x) \in L^1(\nu) \text{ jer je } \nu((E_1)_x) \leq \nu Y < +\infty \text{ i } \mu X < +\infty.$$

$$g_n(y) \in L^1(\mu) \text{ jer je } \mu((E_1)^y) \leq \mu X < +\infty \text{ i } \nu Y < +\infty.$$

Također vrijedi $\nu((E_n)_x) \rightarrow \nu(E_x)$, $\mu((E_n)^y) \rightarrow \mu(E^y)$, pa se može primjeniti LTDK i zaključiti da $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.

Dakle, $\mathcal{C}$ je monotona klasa i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, odakle slijedi $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$, jer je $\sigma(\mathcal{A})$ najmanja σ -algebra koja sadrži $\mathcal{A}$ i $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$. Dobijamo da je $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$, pa tvrdnja vrijedi $\forall E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, pri čemu smo svo vrijeme pretpostavljali da su μ, ν konačne mjere.

2° **Slučaj:** μ i ν σ -konačne mjere, onda je i $\mu \times \nu$ σ -konačna i vrijedi:

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (X_i \times Y_j),$$

t.d. su $X_i \times Y_j$ skupovi konačne mjere. Ako $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ onda prethodno primijenimo na $E \cap (X_i \times Y_j)$, $\forall i, j$ pa imamo:

$$(\mu \times \nu)(E \cap (X_i \times Y_j)) = \int_X \chi_{X_i}(x) \nu(E_x \cap Y_j) d\mu(x) = \int_Y \chi_{Y_j}(y) \mu(E^y \cap X_i) d\nu(y).$$

Primjenom TMK dva puta dobijamo rezultat. □

Teorem 11.1.4 (Fubini–Tonelli). Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ -konačni prostori mjere.

a) **(Tonelli)** Ako $f \in L^+(X \times Y)$, tada funkcije

$$g(x) := \int_Y f_x d\nu \quad \text{i} \quad h(y) := \int_X f^y d\mu$$

pripadaju $L^+(X)$ i $L^+(Y)$ respektivno, i vrijedi:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \quad (1)$$

b) **(Fubini)** Ako $f \in L^1(X \times Y)$, onda $f_x \in L^1(\nu)$ za g.s. $x \in X$ i $f^y \in L^1(\mu)$ za g.s. $y \in Y$. G.s. definirane funkcije $g(x) = \int_Y f_x d\nu$ i $h(y) = \int_X f^y d\mu$ pripadaju $L^1(\mu)$ i $L^1(\nu)$ respektivno, i vrijedi jednakost (1) iznad.

Dokaz.

a) **(Tonelli)** Ako je f karakteristična funkcija, tvrdnja se svodi na Fubini-Tonelli za karakteristične funkcije. Nenegativne jednostavne funkcije su konačne linearne kombinacije karakterističnih funkcija, pa tvrdnja vrijedi i za njih na osnovu linearnosti integrala.

Za opći slučaj $f \in L^+(\mu \times \nu)$ možemo naći niz $(f_n)_n$ nenegativnih jednostavnih funkcija t.d. $f_n \nearrow f$ pa primjenom TMK na odgovarajuće g_n i h_n možemo naći g, h t.d. $g_n \nearrow g$ i $h_n \nearrow h$ (pa će g i h biti izmjerive), i ponovnom primjenom TMK dobijamo

$$\begin{aligned} \int_X g d\mu &\stackrel{\text{TMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n d(\mu \times \nu) \stackrel{\text{TMK}}{=} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu), \\ \int_Y h d\nu &\stackrel{\text{TMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y h_n d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n d(\mu \times \nu) \stackrel{\text{TMK}}{=} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu), \end{aligned}$$

b) (**Fubini**) Prema dijelu a), ako $f \in L^+(\mu \times \nu)$ i $\int f d(\mu \times \nu) < +\infty$, onda slijedi

$$\int_X g d\mu < +\infty \implies g(x) < +\infty \text{ za g.s. } x \in X,$$

$$\int_Y h d\nu < +\infty \implies h(y) < +\infty \text{ za g.s. } y \in Y,$$

pa $f_x \in L^1(\nu)$ za g.s. x i $f^y \in L^1(\mu)$ za g.s. y .

Ako $f \in L^1(X \times Y)$ i f realna, onda $|f| \in L^1(X \times Y)$ i možemo pisati $f = f^+ - f^-$, pa možemo naći odgovarajuće funkcije g^+, g^-, h^+, h^- , takve da je:

$$\int_X g^+ d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) \leq \int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) < +\infty,$$

$$\implies g^+ + g^- < +\infty \text{ za g.s. } x \in X \implies f_x \in L^1(\nu) \text{ za g.s. } x.$$

Slično se pokaže i za $h(y)$, tj. dobijemo $f^y \in L^1(\mu)$ za g.s. $y \in Y$.

Konačno, teorem za realne funkcije slijedi iz:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) - \int_{X \times Y} f^- d(\mu \times \nu),$$

primjenom a) na f^+ i f^- dobijamo jednakost (1).

Za kompleksne funkcije možemo pisati $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, pa primijenimo prethodno (?), valjda opet pod a), nije mi jasno u trenutku pisanja) na $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$.

□

Napomena. Za dodatne komentare vidjeti skriptu (str. 92).

12 Predavanje 12 i 13

12.1 L^p prostori ($1 \leq p \leq +\infty$)

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere, f izmjeriva f-ja na X i $0 < p < +\infty$. Definišimo

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

(pri čemu dopuštamo mogućnost da je $\|f\|_p = \infty$).

Sada definišemo prostor

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ izmjeriva i } \|f\|_p < +\infty\}.$$

Koristićemo i oznaku $L^p(X)$, $L^p(\mu)$ ili jednostavno L^p ako to neće izazvati zabunu. Kao i u slučaju prostora L^1 smatraćemo dvije funkcije iz L^p istim elementom iz L^p ako je $f = g$ g.s.

Ako je A neprazan skup definiramo $l_p(A)$ da bude $L^p(\mu)$, pri čemu je μ mjera prebrojavanja na $(A, \mathcal{P}(A))$, dok prostor $l_p(\mathbb{N})$ jednostavno obilježavamo sa l_p .

Ako su f i g iz L^p , onda imamo sljedeće

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq 2 \max\{|f|, |g|\} \implies |f + g|^p \leq 2(\max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

odakle slijedi da je i $f + g \in L^p$. Kako je $\alpha f \in L^p$ kad god $f \in L^p$ ($\forall \alpha \in \mathbb{C}$), onda je $\alpha f + \beta g \in L^p$, $\forall f, g \in L^p$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pa je L^p linearni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$.

Očigledno je $\|f\|_p = 0$ akko je $f = 0$ g.s. i $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ za svako $\alpha \in \mathbb{C}$, pa ukoliko je zadovoljena još nejednakost trougla, onda je $\|\cdot\|_p$ norma. Pokazaćemo da je $\|\cdot\|_p$ norma za $p \geq 1$, dakle za $0 < p < 1$ nemamo normu.

Lema 12.1.1. Za $a > 0, b > 0$ i $0 < p < 1$ vrijedi nejednakost

$$a^p + b^p > (a + b)^p.$$

Dokaz. B.u.o možemo ptp. daje $0 < a \leq b$. Nakon dijeljenja sa a^p dobijamo

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p > \left(1 + \frac{b}{a}\right)^p.$$

Uvedimo $\frac{b}{a} = t$ i posmatrajmo funkciju $f(t) = 1 + t^p - (1 + t)^p$, za $0 < t \leq 1$.

Kako je

$$f'(t) = pt^{p-1} - p(1+t)^{p-1} = p[t^{p-1} - (1+t)^{p-1}] > 0, \text{ jer } t < 1+t \Rightarrow t^{p-1} > (1+t)^{p-1}, (p-1 < 0)$$

to je naša f-ja f rastuća, pa je $f(t) \geq f(1) = 2 - 2^p > 0$, $\forall t \geq 1$, jer je $0 < p < 1$.

Dakle $f(t) > 0$ za sve $t \geq 1$, tj. $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p > \left(1 + \frac{b}{a}\right)^p$ ($0 < a \leq b$). Odavde dobijamo $a^p + b^p > (a + b)^p$ za sve $a > 0, b > 0$. $\square$

Neka su sada E i F dva disjunktna podskupa konačne pozitivne mjere na X i stavimo $a = (\mu E)^{1/p}$ i $b = (\mu F)^{1/p}$. Tada je

$$\|\chi_E + \chi_F\|_p = \left(\int_X (\chi_E + \chi_F)^p d\mu \right)^{1/p} = (\mu E + \mu F)^{1/p} = (a^p + b^p)^{1/p}$$

$$[\text{Lema iznad}] > a + b$$

$$= \|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p.$$

Dakle, za $0 < p < 1$ ne mora da vrijedi nejednakost trougla, pa $\|\cdot\|_p$ nije norma za $0 < p < 1$.

Lema 12.1.2 (Youngova nejednakost). Ako $a \geq 0, b \geq 0$ i $0 \leq \lambda \leq 1$, onda:

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$$

Dokaz. Ako je $b = 0$, nejednakost je očita. Neka je $b \neq 0$. Pretpostavimo b.u.o. $0 < b \leq a \implies 1 \leq \frac{a}{b}$. Nakon dijeljenja čitave nejednakosti sa b dobijamo:

$$a^\lambda b^{-\lambda} \leq \lambda \frac{a}{b} + (1-\lambda) \iff \left(\frac{a}{b}\right)^\lambda \leq \lambda \frac{a}{b} + (1-\lambda).$$

Uvedimo $t = \frac{a}{b} \geq 1$ i posmatrajmo f-ju $f(t) = t^\lambda - \lambda t - (1-\lambda)$, $t \geq 0$. Kako je $f'(t) = \lambda t^{\lambda-1} - \lambda = \lambda(t^{\lambda-1} - 1) \leq 0$ (jer je $\lambda - 1 < 0$), imamo da je f opadajuća f-ja (i to strogo za $t > 1$).

Dakle, $f(t) \leq f(1) = 0$ pa je $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$ i jednakost se dostiže za $t = 1$, tj. $a = b$. $\square$

Teorem 12.1.3 (Hölderova nejednakost za funkcije). Neka je $1 < p < \infty$ i $1/p + 1/q = 1$. Neka su f, g izmjerljive na X . Tada:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Posebno, ako je $f \in L^p$ i $g \in L^q$, tada je $fg \in L^1$.

Jednakost vrijedi akko $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ g.s., za neke konstante α, β , t.d. $\alpha\beta \neq 0$.

Dokaz. Ako je $\|f\|_p = 0$ ili $\|g\|_q = 0$, tvrdnja je trivijalna: $f = 0$ g.s., ili $g = 0$ g.s. $\implies fg = 0$ g.s. $\implies \|fg\|_1 = 0$. Slično, trivijalno je ako je $\|f\|_p = +\infty$ ili $\|g\|_q = +\infty$.

Sada pretpostavimo da je $0 < \|f\|_p < +\infty$ i $0 < \|g\|_q < +\infty$. Definirajmo:

$$a := \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, \quad b := \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}, \quad \lambda := \frac{1}{p}$$

Primjenom Youngove nejednakosti:

$$a^{1/p} b^{1-1/p} = a^{1/p} b^{1/q} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

Integriranjem dobijamo:

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \|fg\|_1 = \int_X \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu(x) \leq \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_p^p} \underbrace{\int_X |f(x)|^p d\mu(x)}_{=\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_q^q} \underbrace{\int_X |g(x)|^q d\mu(x)}_{=\|g\|_q^q}$$

Desna strana se pojednostavljuje na $\frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\implies 1 \geq \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q}$$

$$\implies \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Za $f \in L^p, g \in L^q \implies \|f\|_p, \|g\|_q < +\infty \implies \|fg\|_1 < +\infty \implies fg \in L^1$.

Prema Youngovoj nejednakosti, jednakost vrijedi kada:

$$\underbrace{\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}}_{=\alpha} = \underbrace{\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}}_{=\beta}, \text{ g.s.}$$

$\square$

Uslov $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koji se pojavljuje u Hölderovoj nejednakosti često se pojavljuje u L^p teoriji. Ako je $1 < p < +\infty$, onda se broj q t.d. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zove konjugovani eksponent od p .

Teorem 12.1.4 (Nejednakost Minkowskog). Ako je $1 \leq p < +\infty$ i $f, g \in L^p$, tada:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Dokaz. Za $p = 1$ tvrdnja je trivijalna, jer je $|f + g| \leq |f| + |g|$, a integriranjem dobijemo $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. Ako je $f + g = 0$ g.s., tada je $\int_X |f + g| d\mu = 0 \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Ako je $p > 1$ i $f + g \neq 0$ g.s., tada:

$$|f + g|^p = |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|) \cdot |f + g|^{p-1} = |f| \cdot |f + g|^{p-1} + |g| \cdot |f + g|^{p-1}$$

Neka je q takav da vrijedi $1/p + 1/q = 1$. Tada je $q + p = pq \implies p = q(p - 1)$.

Integriranjem i primjenom Hölderove nejednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu \\ &\leq \int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \\ [\text{Hölder}] &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \\ [(p-1)q = p] &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/q} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q} \end{aligned}$$

Prema tome:

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q}$$

Dijeljenjem obje strane s $\|f + g\|_p^{p/q}$:

$$\|f + g\|_p^{p-p/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Kako je $p - p/q = p(1 - 1/q) = p(1/p) = 1$, dobijamo:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

Dokazali smo da je L^p ($1 \leq p \leq +\infty$) normiran vektorski prostor, a norma je zadana sa:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

Napomena. Analogno sa prostorima ℓ_p :

$$\ell_p = \left\{ (a_i)_i : \sum_i |a_i|^p < +\infty \right\}$$

$$\|(a_i)\|_p = \left(\sum_i |a_i|^p \right)^{1/p}$$

Ako je μ mjera prebrojavanja, $X = \mathbb{N}$, tada:

$$\left(\int_{\mathbb{N}} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f(i)|^p \right)^{1/p}$$

Drugim riječima, integrali su redovi kada je mjera mjera prebrojavanja. Kriterij konvergencije redova se također može izvesti iz ovoga.

Teorem 12.1.5 (L^p je Banachov prostor, aka Riesz-Fischerov teorem). L^p , $1 \leq p < +\infty$, je Banachov prostor (potpun normiran prostor).

Dokaz. Preskačemo. □

Posljedica 12.1.6. Neka je $1 \leq p < +\infty$. Ako je $(f_n)_n \subset L^p$ i $f_n \rightarrow f$ u L^p normi (tj. $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$), tada postoji podniz $(f_{n_j})_j$ takav da konvergira ka f g.s.

Dokaz. Preskačemo. □

Napomena. Ovo možemo pokazati teoremima koje smo učili na predavanju o vrstama konvergencije.

$$f \in L^p \iff |f|^p \in L^1$$

Propozicija 12.1.7 (Bitna propozicija). Za $1 \leq p < +\infty$, skup jednostavnih funkcija oblika:

$$\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}, \quad \text{gdje je } \mu(E_j) < +\infty,$$

gust je u L^p .

Napomena. Neprekidne funkcije su također guste u skupu jednostavnih funkcija (provjeriti).

Dokaz. $\phi \in L^p$ (očigledno). Ako je $f \in L^p$, neka su $(\phi_n)_n$ jednostavne funkcije takve da $\phi_n \rightarrow f$ g.s. i $|\phi_n| \leq |f|$ (teorem o aproksimaciji).

$$\phi_n \in L^p \text{ i } |\phi_n - f|^p \leq 2^p \cdot \underbrace{|f|^p}_{\in L^1, \text{ jer } f \in L^p}, \text{ (LTDK). Dakle:}$$

$$\|\phi_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

Imamo još i:

$$\int_X |\phi_n|^p d\mu = \sum_j |a_j|^p \mu(E_j) \leq \int_X |f|^p d\mu < +\infty$$

Slijedi da je $\mu(E_j) < +\infty$. □

12.2 L^∞ prostor

Sada razmatramo L^∞ .

Neka f izmjerljiva na X , definirajmo:

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > M\}) = 0\}$$

Ovo je norma esencijalnog supremuma, nekad koristimo i oznaku $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$. Ako je $\|f\|_\infty = +\infty$, ne postoji konačno esencijalno ograničenje.

Napomena. $\inf \emptyset = +\infty$ po definiciji.

Naprimjer $\mu(\{x : |f(x)| > 1\}) = 0 \implies |f(x)| \leq 1$ g.s. Generaliziramo ovaj primjer za M , tj. $|f(x)| \leq M$ g.s. Tada vrijedi: $|f(x)| \leq M$ g.s., ali tada $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ g.s.

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ izmjerljiva i } \|f\|_\infty < +\infty\}$$

Primjer 12.2.1. $1/x \notin L^\infty$.

Drugim riječima, L^∞ je prostor gotovo svugdje ograničenih funkcija.

Teorem 12.2.2.

a) Ako su f, g mjerljive na X , tada:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Ako je $f \in L^1$ i $g \in L^\infty$, tada je $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ akko $|g(x)| = \|g\|_\infty$ g.s. na skupu gdje je $f(x) \neq 0$ (tj. akko je g konstanta).

b) $\operatorname{ess\,sup} = \|\cdot\|_\infty$ je norma.

c) $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ akko postoji $E \in \mathcal{M}$ takav da je $\mu(E^c) = 0$ i $f_n \rightrightarrows f$ na E .

d) L^∞ je Banachov prostor. (Neće biti na ispitu; L^p Banach hoće ?? nismo radili dokaz tkd. mislim da ipak neće, receno je na idućem predavanju da neće).

e) Jednostavne funkcije su guste u L^∞ . (Nije teško).

Dokaz. a) $|g| \leq \|g\|_\infty$ uvijek vrijedi, stoga je $|fg| \leq |f||g| \leq |f|\|g\|_\infty$. Integrirajući ovu nejednakost dobijamo:

$$\int_X |fg| d\mu \leq \int_X |f|\|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \int_X |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Primjetimo da je $|f|\|g\|_\infty - |f||g| \geq 0$ g.s., pa je

$$\int (|f|\|g\|_\infty - |f||g|) d\mu = 0$$

akko je $|f|\|g\|_\infty - |f||g| = 0$ g.s., odakle slijedi $f = 0$ ili $|g| = \|g\|_\infty$ g.s.

- b) Ako je $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow |f| \leq 0$ g.s. $\Rightarrow f = 0$ g.s. Ako je $\lambda = 0$ onda je očito $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$. Za $\lambda \neq 0$ je $|\lambda f| = |\lambda| |f| \leq |\lambda| \|f\|_\infty$ g.s. $\Rightarrow \|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$.

Primjenjujući ovaj rezultat na λ^{-1} i λf imamo:

$$\|f\|_\infty \leq |\lambda^{-1}| \|\lambda f\|_\infty \Big/ \cdot |\lambda| \Rightarrow |\lambda| \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$$

Iz čega slijedi $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.

Dalje, $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ g.s. $\Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

- c) $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \iff \exists E \in \mathcal{M}$ t.d. $\mu(E^c) = 0$ i $f_n \rightrightarrows f$ na E .

($\Rightarrow$) Ptp. $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ kad $n \rightarrow \infty$. Tada je $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ g.s.

Definirajmo:

$$F_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \|f_n - f\|_\infty\}$$

Tada je $\mu(F_n) = 0$. Def. $F := \bigcup_n F_n$ i $E = F^c$. Slijedi $E^c = F$ i

$$\mu(F) \leq \sum_n \mu(F_n) = \sum_n 0 = 0.$$

Vrijedi $|f_n(x) - f(x)| < \|f_n - f\|_\infty$ za $\forall x \in E$, što implicira da $f_n \rightrightarrows f$ na E .

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da $f_n \rightrightarrows f$ na E i da je $\mu(E^c) = 0$. Za $\forall \varepsilon > 0$ vrijedi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za dovoljno veliko n i za $\forall x \in E$, tj. g.s. $x \in X$. To implicira da je $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ za $n \geq n_0$. Slijedi $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$, odnosno $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ kad $n \rightarrow \infty$.

- d) neće biti na ispit, zainteresirani čitaoc dokaz može pronaći u materijalima.

- e) Neka je $f \in L^\infty$. Kako je f izmjeriva to postoji $(\varphi_n)_n$ niz jednostavnih izmjerivih f-ja t.d. $0 \leq |\varphi_1| \leq |\varphi_2| \leq \dots \leq |f|$ i $\varphi_n \rightarrow f$ po tačkama i uniformno na skupu na kojem je f ograničena. Imamo da je $|f| \leq \|f\|_\infty$ g.s. Neka je E skup na kojem je f ograničena, tada je $\mu E^c = 0$. Ovo znači da je f ograničena na E i $\varphi_n \rightrightarrows f$ na E , pa na osnovu c) slijedi $\varphi_n \rightarrow f$ u L^∞ .

□

Napomena. $f \in L^p \iff |f|^p \in L^1$.

Napomena. $\ell_p = L^p(\mathbb{N})$ (sa mjerom prebrojavanja).

Propozicije o inkluzijama i normama L^p prostora

Propozicija 12.2.3. Ako je $0 < p < q < r \leq +\infty$, onda je $L^q \subseteq L^p + L^r$, tj. $f \in L^q \implies \exists g \in L^p, h \in L^r$ t.d. $f = g + h$.

Dokaz. Neka je $f \in L^q$. Definirajmo skup $E := \{x \in X : |f(x)| > 1\}$. Tada je $X = E \uplus E^c$. Definirajmo $g := f \cdot \chi_E$ i $h := f \cdot \chi_{E^c}$. Tada je očito $f = g + h$, i imamo

Pokažimo da $g \in L^p$:

$$|g|^p = |f|^p \cdot \chi_E \leq |f|^q \cdot \chi_E \Big/ \int \implies \int |g|^p d\mu \leq \int |f|^q \cdot \chi_E d\mu \leq \int_X |f|^q d\mu < +\infty,$$

odakle slijedi, $g \in L^p$.

Pokažimo da $h \in L^r$:

$$|h|^r = |f|^r \cdot \chi_{E^c} \leq |f|^q \cdot \chi_{E^c} \Big/ \int \implies \int |h|^r d\mu \leq \int |f|^q d\mu < +\infty$$

Dakle, $h \in L^r$.

Specijalni slučaj $r = \infty$: Imamo $|h| = |f| \cdot \chi_{E^c} \leq 1 \implies \|h\|_\infty \leq 1 \implies h \in L^\infty$. $\square$

Propozicija 12.2.4. Neka je $0 < p < q < r \leq +\infty$. Onda je $L^p \cap L^r \subseteq L^q$, i vrijedi (za bilo koju mjeru μ):

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_r^{1-\lambda},$$

za $\lambda \in (0, 1)$ t.d. $1/q = \lambda/p + (1-\lambda)/r$.

Dokaz. Slučaj $r = \infty$: Neka $f \in L^p \cap L^\infty$. Vrijedi:

$$\int |f|^q d\mu = \int |f|^p \cdot |f|^{q-p} d\mu \leq \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \cdot \|f\|_p^p < \infty \Big/^{1/q}$$

Slijedi:

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} \cdot \|f\|_p^p \implies \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{(q-p)/q} \cdot \|f\|_p^{p/q} = \|f\|_\infty^{1-\lambda} \cdot \|f\|_p^\lambda$$

uz $\lambda = p/q$ i $r = \infty$. Provjera za $\lambda = p/q$:

$$1/q = \lambda/p + (1-\lambda)/r = (p/q)/p + (1-p/q)/\infty = 1/q + 0 = 1/q$$

Time je dokazano $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_\infty^{1-\lambda}$.

(Slučaj $r \neq \infty$ valjda za vj. ?) $\square$

Propozicija 12.2.5. Ako je $A \neq \emptyset$ i $0 < p < q \leq +\infty$, onda je $\ell_p(A) \subseteq \ell_q(A)$. I vrijedi

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p.$$

Dokaz. Slučaj $q = +\infty$: Neka je $f = (f(\alpha))_{\alpha \in A}$. Tada je

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{\alpha \in A} |f(\alpha)| = \sup_{\alpha \in A} |f(\alpha)|.$$

Vrijedi:

$$\|f\|_\infty^p = \sup_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^p \leq \sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^p = \|f\|_p^p \implies \|f\|_\infty \leq \|f\|_p.$$

Time smo dobili $f \in \ell_p(A) \implies f \in \ell_\infty(A)$.

Opći slučaj $q < +\infty$. Neka $\lambda = \frac{p}{q}$. Imamo $f \in \ell_p(A) = L^p(A, \mu)$, gdje je μ mjera prebrojavanja. Slijedi $\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^p < +\infty$, što znači da je skup $\{|f(\alpha)|\}$ ograničen. Vrijedi:

$$\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^q = \sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^p \cdot |f(\alpha)|^{q-p} \leq \|f\|_\infty^{q-p} \cdot \sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^p = \|f\|_\infty^{q-p} \cdot \|f\|_p^p \Big/^{1/q}$$

Slijedi:

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{p/q} \cdot \|f\|_\infty^{(q-p)/q} \leq \|f\|_p^{p/q} \cdot \|f\|_p^{(q-p)/q} = \|f\|_p,$$

jer smo iznad vidjeli da je $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$. $\square$

Propozicija 12.2.6. Ako¹⁹ je $\mu(X) < +\infty$ i $0 < p < q \leq +\infty$, onda je $L^p(X) \supseteq L^q(X)$, i vrijedi $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot (\mu(X))^{1/p-1/q}$.

Dokaz. Slučaj $q = \infty$: Neka $f \in L^\infty(X)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \int_X d\mu = \|f\|_\infty^p \cdot \mu(X) \Big/^{1/p} \\ \Rightarrow \|f\|_p &\leq \|f\|_\infty \cdot (\mu(X))^{1/p} = \underbrace{\|f\|_\infty}_{< \infty, \text{ jer } f \in L_\infty} \cdot \underbrace{(\mu(X))^{1/p-1/\infty}}_{< \infty, \text{ jer } \mu(X) < \infty} < +\infty. \end{aligned}$$

Slučaj $q < +\infty$: Primjenjujemo Hölderovu nejednakost na integral $\int_X |f|^p \cdot 1 d\mu$. Biramo eksponente $p_1 = q/p$ i $q_1 = q/(q-p)$. Provjera eksponenata: $1/p_1 + 1/q_1 = p/q + (q-p)/q = 1$. Oba eksponenta su strogo veća od 1 jer je $p < q$. Prema Hölderovoj nejednakosti:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \cdot 1 d\mu \leq \left(\int_X (|f|^p)^{q/p} d\mu \right)^{p/q} \cdot \left(\int_X 1^{q/(q-p)} d\mu \right)^{(q-p)/q} \\ &= \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{p/q} \cdot (\mu(X))^{(q-p)/q} \\ &= \|f\|_q^p \cdot (\mu(X))^{(q-p)/q} \Big/^{1/p} \\ \Rightarrow \|f\|_p &\leq \|f\|_q \cdot (\mu(X))^{(q-p)/(pq)} = \|f\|_q \cdot (\mu(X))^{1/p-1/q}. \end{aligned}$$

Dakle, $\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{1/p-1/q}$. □

Napomena. Mi $\|f\|_p$ možemo računati za $\forall p > 0$, ali za $1 > p > 0$ $\|f\|_p$ neće biti norma, ali mi kao normu koristimo samo za q/p , a $q/p > 1$!

¹⁹"Ovo je Hölder u biti"

Dodatak

13 Index teorema

3.1.4 Teorem (O osnovnim osobinama mjere)	14
3.1.10 Teorem (O upotpunjenju mjere)	16
4.1.2 Teorem (Caratheodory, bez dokaza)	19
4.1.4 Teorem (O proširenju premjere)	19
4.2.2 Teorem (Egzistencija i jedinstvenost Borelove mjere)	20
4.3.1 Teorem	22
4.3.2 Teorem	22
5.1.1 Teorem	23
7.1.1 Teorem (Teorem o aproksimaciji)	32
7.1.2 Teorem	33
8.1.1 Teorem (TMK-Teorem monotone konvergencije)	35
8.2.5 Teorem (LTDK-Lebesgueov teorem dominirane konvergencije)	41
8.2.7 Teorem (O gustoći jednostavnih neprekidnih funkcija u L_1)	42
8.2.8 Teorem (O prelasku na limes i diferenciranje po parametru pod znakom integrala)	42
9.1.1 Teorem	44
9.1.4 Teorem	45
Kraj prvog parcijalnog	48
10.1.9 Teorem (Egoroff)	53
11.1.3 Teorem (Fubini–Tonelli za karakteristične funkcije)	57
11.1.4 Teorem (Fubini–Tonelli)	59
12.1.3 Teorem (Hölderova nejednakost za funkcije)	62
12.1.4 Teorem (Nejednakost Minkowskog)	63
12.1.5 Teorem (L^p je Banachov prostor, aka Riesz-Fischerov teorem)	64
12.2.2 Teorem	65