Kombinatorika—vježbe

Bazirano na vježbama od A. Bolić

Vježbe bilježio Atif Degirmendžić

Ljetni semestar – 2024

Ove bilješke nisu odobrene od strane asistentice, i ja sam ih modificirao (često drastično) nakon vježbi. Sadržaj izložen ovdje ni blizu nije precizna reprezentacija održanih vježbi, a sve eventualne greške su skoro sigurno moje.[0]

[0]Disclaimer, kao i TEX template, preuzeti su od Dexter Chua

Sadržaj

1 Dirihleov princip

Osnovni oblik: Za prirodan broj n, ako je $n + 1$ objekata raspoređeno u n skupova, mora postojati skup u kojem su bar dva objekta.

Opšti oblik: Za prirodne brojeve k, n, ako je $kn + 1$ objekata raspoređeno u n skupova, mora postojati skup u kojem je bar $k + 1$ objekata.

Alternativna formulacija preko funkcija: Ne postoji injektivna funkcija čiji je kodomen manji od njenog domena. (manji u smislu kardinalnosti)

Zadaci

Zadatak 1. U jednoj školi je 55 učenika osmog razreda koji su raspoređeni u 3 odjeljenja. Svako od učenika ima smeđe, plave ili zelene oči. Dokazati da postoji 7 učenika iz istog odjeljenja koji svi imaju istu boju očiju.

Rješenje.

Prvi način—direktno: Kako god da rasporedimo 55 učenika u odjeljenja, prema Dirihleovom principu uvijek ćemo imati odjeljenje sa bar 19 učenika, naime jer

$$55 = \underbrace{18}_{k} \cdot \underbrace{3}_{n} + 1$$

pa primjenom opšteg oblika Dirihleovog principa, dobijamo da mora postojati grupa u kojoj je bar $k + 1$ učenika, tj. u kojoj je bar $18 + 1 = 19$ učenika. Ako dokažemo da u odjeljenju sa bar 19 učenika postoji 7 učenika sa istom bojom očiju, završili smo. Sada raspoređujemo 19 učenika u 3 grupe (3 boje očiju, prethodno smo raspoređivali u 3 odjeljenja): $19 = 6 \cdot 3 + 1$. Opet primjenom opšteg oblika dobijamo da mora postojati bar $6 + 1 = 7$ učenika sa istom bojom očiju. Tvrdnja je dokazana.

Drugi način—kontradikcijom[1]: Pretpostavimo da u svakom odjeljenju postoji najviše 6 učenika sa istom bojom očiju[2]. Iz toga slijedi da je maksimalan broj učenika u odjeljenju $6 \cdot 3 = 18$, jer kad bi bilo više od 18, tj. kad bi bilo $m \geq 6 \cdot 3 + 1 > 18$ učenika, onda prema Dirihleovom principu, učenika neke boje očiju bi moralo biti bar $6 + 1 = 7$, što vodi u kontradikciju sa pretpostavkom da najviše 6 učenika ima istu boju očiju. Dakle, maksimalan broj učenika u odjeljenju je 18. Sada, s obzirom da imamo 3 odjeljenja, i u svakom ima najviše 18 učenika, to znači da sveukupno može biti najviše $3 \cdot 18 = 54$ učenika. Međutim, to je kontradikcija sa početnom pretpostavkom da imamo 55 učenika. Pretpostavka da u svakom odjeljenju postoji najviše 6 učenika sa istom bojom očiju nas je odvela u kontradikciju, dakle ta pretpostavka nije tačna, pa mora vrijediti suprotno: postoji odjeljenje u kojem ima bar 7 učenika sa istom bojom očiju.

$\square$

[1] Za neke teže zadatke ovaj način je praktičniji

[2] Analogno kako smo u prvom načinu dva puta upotrijebili Dirihleov princip, ovdje će biti potrebno pokazati dvije kontradikcije, pri čemu će nas prva odvesti u drugu

Zadatak 2. Data su 52 cijela broja. Dokazati da među njima postoje dva čiji je zbir ili razlika djeljiva sa 100.[3]

Rješenje.

Označimo date cijele brojeve sa $x_1, \ldots, x_{52}$. Trebamo da dokažemo da postoje x_i, x_j takvi da

$$100 \mid x_i + x_j \;\vee 100 \mid x_i - x_j \;.$$

Prije nego što počnemo rješavati zadatak, primjetimo dvije stvari:

1. Teško da odmah možemo primjeniti Dirihleov princip, jer skup na kojem bi ga trebali primjeniti je beskonačan, s obzirom da dati cijeli brojevi mogu biti bilo koji cijeli brojevi.

2. Suma dva cijela broja je djeljiva sa 100 kada je suma ostataka (pri dijeljenju sa 100) ta dva broja djeljiva sa 100. Ovo sugerira da su nam bitni samo ostaci datih cijelih brojeva pri dijeljenju sa 100. Na primjer, ako su nam dati 132 i 1068, onda u ovom kontekstu, za naše svrhe, možemo ih poistovjetiti sa 32 i 68, respektivno, jer $132 \equiv 32 \pmod{100}$ i $1068 \equiv 68 \pmod{100}$. Primjetimo da je i nakon poistovjećivanja djeljivost sume sa 100 očuvana. Označimo ostatke datih cijelih brojeva pri dijeljenju sa 100 sa $r_k, k = \overline{1,52}$. Dakle imamo $x_k \equiv r_k \pmod{100}$ za svako k.

Ideja navedena pod 2. nam rješava i problem pod 1., jer $0 \le r_k < 100$, za svako k. Drugim riječima, sada imamo ograničen, pa i konačan skup cijelih brojeva na koji možemo primjeniti Dirihleov princip.

Sada naš zadatak postaje:

Dati su nam cijeli brojevi $r_1, \ldots, r_{52}$. Trebamo da dokažemo da postoje r_i, r_j takvi da

$$100 \mid r_i + r_j \;\vee 100 \mid r_i - r_j \;.$$

Pretpostavimo suprotno, dobijamo da za svako r_i, r_j vrijedi

$$100 \nmid r_i + r_j \wedge 100 \nmid r_i - r_j$$

Iz $100 \nmid r_i - r_j$ slijedi da ne postoje dva jednaka broja, jer da postoje imali bi $r_i - r_j = 0$, a $100 \mid 0$.

Iz $0 \le r_k < 100$ slijedi da $1 \le r_i + r_j \le 99 + 98 < 200$ za svako r_i, r_j, tj. ne postoje dva broja čiji je zbir 200. Ovo znači da je suma nekih r_n, r_m djeljiva sa 100 samo ako je ta suma jednaka 100.

Pretpostavku $100 \nmid r_i + r_j$ još nismo iskoristili, ali ona nam daje ideju kako da uparimo date brojeve:

Uparimo sada sve brojeve koje r_k može uzimati, na način da zbir parova bude djeljiv sa 100 (jedini način je da im suma bude jednaka 100):

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1,99 \\ 2,98 \\ \vdots \\ 49,51 \\ 50 \end{array}$$

Zadatak kaže da nam je dato 52 broja, a mi smo namjestili da su to neki ovih 100 brojeva prikazanih lijevo, raspoređenih u 49 parova, uz 0 i 50 koji nemaju para. Brojeve smo ovako uparili jer imamo uslov da zbir nikoja dva ne može biti djeljiv sa 100, drugim riječima, unutar naših 52 brojeva nikad ne mogu biti oba broja iz jednog para. Npr. ako imamo broj 49, onda ne možemo imati 51. Dakle, ako imamo iz svakog para tačno jedan broj, uz 0 i 50 dobijamo $49 + 1 + 1 = 51$ brojeva, što je u kontradikciji sa tim da ih imamo 52. □

[3] Ovaj zadatak pripada vrsti zadataka koji se rješavaju tako što na neki način uparimo date elemente, pri čemu parove tretiramo kao kutije, i onda primjenom Dirihleovog principa dodjemo do željenog zaključka, s tim da je primjena Dirihleovog principa često naizgled skrivena.

Zadatak 3. Neka je dat skup $P = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}$. Dokazati da svaki njegov podskup, koji ima barem 51 element, sadrži dva broja čija je razlika jednaka 5.

Rješenje.[4]

Slično kao u prethodnom zadatku, ovaj ćemo rješiti uparivanjem brojeva i primjenom Dirihleovog principa.

Uparimo elemente skupa P na sljedeći način:

$$\begin{array}{ccccc} 1-6 & 11-16 & 21-26 & & 91-96 \\ 2-7 & 12-17 & 22-27 & & 92-97 \\ 3-8 & 13-18 & 23-28 & \dots & 93-98 \\ 4-9 & 14-19 & 24-29 & & 94-99 \\ 5-10 & 15-20 & 25-30 & & 95-100 \end{array}$$

Brojeve smo uparili na način da je (apsolutna) razlika svakog para jednaka 5, i svaki broj se pojavljuje tačno jednom. Dobili smo 50 parova, pri čemu parove možemo interpretirati kao kutije.

Neka je proizvoljno izabran podskup skupa P, koji ima 51 elemenat, želimo da elemente tog podskupa rasporedimo u 50 iznad konstruisanih kutija. To jest, $51 = 1 \cdot 50 + 1$ objekata raspoređujemo u 50 kutija, pa primjenom Dirihleovog principa dobijamo da moraju postojati $k + 1 = 1 + 1 = 2$ objekta u nekoj kutiji. A jer su ovdje kutije parovi čija je razlika jednaka 5, tvrdnja je dokazana.

□

Zadatak 4. Na takmičenju iz matematike su učestvovala 32 učenika i radili su 5 zadataka. Nagrade su dobili učenici koji su tačno riješili barem dva zadatka. Ako se zna da je 25% učenika dobilo nagrade, dokazati da postoji zadatak koji nije uradilo više od 12 učenika.

Rješenje.[5]

Bar 2 zadatka je tačno uradilo 8 učenika jer je $32/4 = 8$. Iz toga slijedi da je 24 učenika uradilo jedan ili nijedan zadatak. Maksimalan broj sveukupno urađenih zadataka je onda $24 \cdot 1 + 8 \cdot 5 = 64$.

Pretpostavimo suprotno: Sve zadatke je uradilo bar 13 učenika. To znači da je urađeno bar $13 \cdot 5 = 65$ zadataka, što je u kontradikciji sa iznad dobivenim da je broj urađenih zadataka najviše 64. Dakle, postoji zadatak koji nije uradilo više od 12 učenika.

□

Zadatak 5. Za nekoliko tročlanih skupova kažemo da su interesantni ako svaka dva skupa imaju tačno jedan zajednički element, te ne postoji element koji pripada svim skupovima.

a) Dokazati da ne postoji 8 interesantnih tročlanih skupova.

b) Postoji li 7 interesantnih tročlanih skupova? Odgovor obrazložiti.

Rješenje.

a) Neka je dato osam skupova $S_1, \dots, S_8$, za koje vrijedi

$$|S_i| = 3, \ \forall i \in \{1, \dots, 8\} \tag{1}$$

$$|S_i \cap S_j| = 1, \ \forall i \neq j \tag{2}$$

$$\bigcap_{i=1}^{8} S_i = \varnothing \tag{3}$$

[4]Zadatak se može rješiti kontradikcijom i rješenje bi izgledalo dosta slično.

[5]I u ovom rješenju je Dirihleov princip skriven.

Izaberimo neki od datih 8 skupova i označimo ga sa $S_1 = \{a, b, c\}$.[6] Ovdje ćemo kutije napraviti na osnovu presjeka drugih skupova sa skupom S_1. Npr. ako bi imali $a \in S_2, a \in S_3$, i $a \notin S_i$ za ostale i, onda bi S_2, S_3 bili u istoj kutiji, i tu kutiju možemo nazvati a-kutija. Preciznije, neki skup S_k pripada kutiji a, b ili c u zavisnosti od toga u kojem se elementu S_1 i S_k sijeku.

Nakon što smo izabrali S_1, preostaje nam 7 skupova, i svaki od njih mora imati tačno jedan zajednički element sa S_1, to jest, svaki od preostalih sedam S_k skupova mora biti u nekoj kutiji. Dakle, raspoređujemo $7 = 2 \cdot 3 + 1$ skupova u 3 kutije, pa po Dirihleu neka kutija mora imati bar $2 + 1 = 3$ skupa. Bez umanjenja opštosti, neka je to a-kutija, i neka su u njoj skupovi S_2, S_3, S_4. Skupove možemo raspisati:

$$S_2 = \{a, d, e\}$$
$$S_3 = \{a, f, g\}$$
$$S_4 = \{a, h, j\}$$

Zbog osobine (3), znamo da ćemo imati bar jedan skup koji nema element a, b.u.o. neka je to S_5, i opet b.u.o. neka je S_5 u b-kutiji[7]. To znači da je (neformalno) $S_5 = \{b, \dots\}$, pri čemu u S_5 imamo mjesta za još dva elementa. Ali s obzirom da S_5 treba da ima zajednički element i sa skupovima S_2, S_3, S_4, kako god da ih izaberemo, dobijemo da S_5 mora imati 4 elementa (npr. $S_5 = \{b, d, f, h\}$). Dakle, htjeli smo ispoštovati osobinu (2), a to nas je odvelo u kontradikciju sa osobinom (1). Tvrdnja je dokazana.

b) Odgovor: Postoji. Obrazloženje: Damo primjer, recimo, krenemo sa istim skupovima S_1, S_2, S_3 kao iznad, i rasporedimo elemente u preostale skupove na sljedeći način $S_4 = \{b, d, f\}, S_5 = \{b, e, g\}, S_6 = \{c, d, g\}, S_7 = \{c, e, f\}$.

□

[6] Odavdje pa nadalje u ovom zadatku zanemarujemo oznake/indekse sa početka rješenja ovog zadatka, ono nam je služilo samo da iskažemo osobine koje pretpostavljamo. (U programerskom žargonu, sad smo u novom namespaceu.)

[7] I ovdje kažemo "b.u.o." jer smo S_5 mogli staviti u c-kutiju, i slično bi nastavili

2 Grafovi

Formula–lema o rukovanju: $2|E| = \sum d_i$, gdje je $|E|$ broj grana, a d_i stepen i-tog čvora (stepen i-tog čvora je broj čvorova s kojima je taj čvor povezan granama).[8]

Zadaci

Zadatak 1. U grafu G sa 24 čvora i 30 grana postoji pet čvorova stepena 4, sedam čvorova stepena 1 i sedam čvorova stepena 2. Svi ostali čvorovi imaju stepen 3 ili 4. Koliko je čvorova stepena 4?

Rješenje.

Označimo skup čvorova sa V i skup grana sa E. Imamo $|V| = 24$ i $|E| = 30$. Sa x označimo broj čvorova stepena 3, a sa y broj preostalih čvorova stepena 4. Zadatak nam onda kaže da imamo sljedeće:

5 čvorova	stepena 4
7 čvorova	stepena 1
7 čvorova	stepena 2
x čvorova	stepena 3
y čvorova	stepena 4

Da rješimo zadatak, biće potrebno da koristeći date informacije napravimo sistem od dvije jednačine, sa dvije nepoznate x, y.

Prva jednačina: Sveukupno imamo 24 čvora, dakle dobijamo jednačinu

$$24 = 5 + 7 + 7 + x + y \iff x + y = 24 - (5 + 7 + 7) \iff x + y = 5$$

Druga jednačina: Ovdje možemo koristiti formulu $2|E| = \sum d_i$. Uvrštavajući u formulu naše vrijednosti, dobijamo:

$$2 \cdot 30 = 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + x \cdot 3 + y \cdot 4 \iff 3x + 4y = 19$$

Sada dobijamo željeni sistem:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 3x + 4y &= 19 \end{aligned}$$

Rješavajući sistem dobijamo $y = 4$ i $x = 1$. Preostaje jedino da saberemo sve čvorove stepena 4: $5 + 4 = 9$. Dakle, graf ima 9 čvorova stepena 4.

□

[8] Formula vrijedi za konačne, neusmjerene grafove, i poznata je pod nazivom Handshaking lemma.

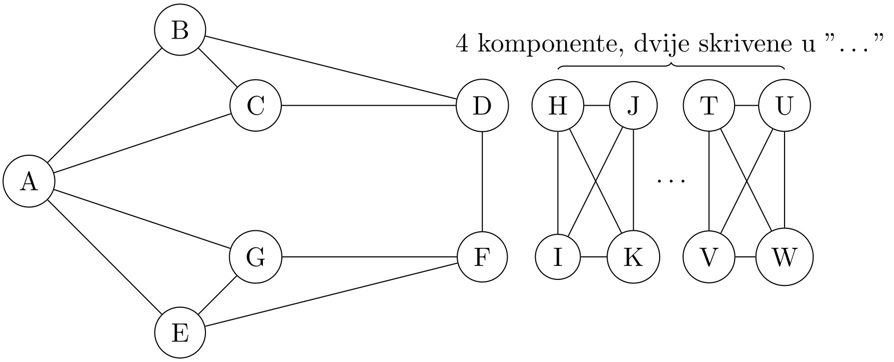
Zadatak 2. Koliko najviše čvorova može imati graf u kojem postoji 35 grana i stepen svakog čvora je bar 3?

Rješenje.

Imamo $|E| = 35$ i znamo $\sum d_i = 70$. Neka je n broj čvorova u grafu. Onda imamo $3n \leq 70$, i ako rješimo nejednačinu, dobijamo $n \leq 70/3 = 23.3$, ali jer n mora biti prirodan broj, onda je $n \leq 23$. Dakle ovakav graf može najviše imati 23 čvora. (Do broja 23 smo mogli doći i na način da primjetimo da $70 = 22 \cdot 3 + 1 \cdot 4$, tj. kad maksimiziramo broj čvorova, morati će se pojaviti 22 čvora stepena 3 i jedan čvor stepena 4).

Moramo još provjeriti da li ovakav graf postoji, jer gornja granica za broj čvorova nam to ne garantuje. Ako uspješno nacrtamo ovakav graf, uvjerićemo se da postoji.

Posmatrajmo graf ispod, on se sastoji od pet komponenti: jedne veće komponente (lijevo), sa 11 grana, i 4 manje, sa 6 grana. Dakle, nacrtani graf ima $35 = 11 + 4 \cdot 6$ grana. Također primjetimo da je svaki čvor stepena 3, osim čvora A, koji je stepena 4. Dakle, graf sa 35 grana i 23 čvora, čiji je svaki čvor stepena bar 3, uistinu postoji.



□

Zadatak 3. Svaki od 17 naučnika komunicira sa ostalima. Komuniciraju o tri teme ukupno, međutim, svaka dva komuniciraju o tačno jednoj temi. Dokazati da postoje bar tri naučnika koji međusobno komuniciraju o istoj temi.

Rješenje.

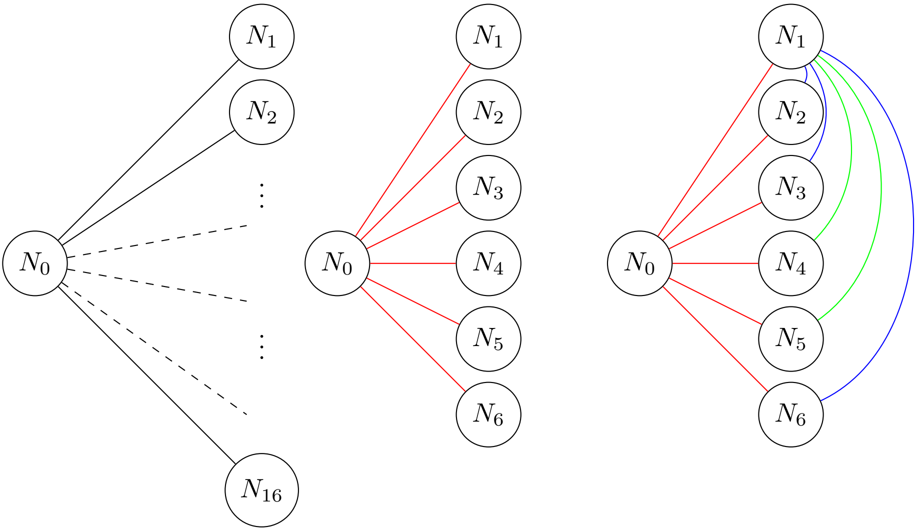
Zadatak možemo interpretirati pomoću grafova na sljedeći način: neka su čvorovi naučnici, a grane između čvorova neka predstavljaju komunikaciju između naučnika, također, teme možemo predstaviti bojom grane, neka to budu boje crvena, plava i zelena.

Dalje, ideja će biti da iskoristimo Dirihleov princip, pri čemu će nam kutije biti boje. Općenito, želimo pokazati da postoji "trougaoni" podgraf u našem grafu, gdje sve stranice tog "trougla" imaju istu boju.

Fiksirajmo jednog naučnika, recimo N_0, također trenutno zanemarimo povezanost između ostalih čvorova (vidi graf lijevo na slj. str.)[9]. Sada nam Dirihle daje da mora postojati bar 6 grana neke boje, jer $16 = 5 \cdot 3 + 1$. B.u.o. neka je boja crvena i neka su naučnici s kojima N_0 komunicira o crvenoj temi $N_1, \ldots, N_6$.

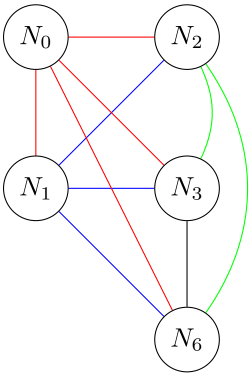
Ovo znači da postoji graf dolje u sredini, koji je ujedno i podgraf grafa lijevo.

[9] I u nastavku, "fiksirajmo" će značiti da zanemarujemo povezanost nekih ostalih čvorova.



Izaberimo i fiksirajmo jednog od naučnika $N_1, \ldots, N_6$, b.u.o. neka je to N_1. Iako smo do sad u prikazima grafova to zanemarivali, znamo da je i N_1 povezan sa preostalih pet naučnika $N_2, \ldots, N_6$. Ako je ijedna od tih grana što ih povezuje crvena, onda imamo tri naučnika koji razgovaraju o istoj temi i zadatak je završen (tj. imali bi crveni "trougao" na crtežu u sredini). Zato pretpostavimo suprotno: nijedna od opisanih pet grana nije crvena. Dakle, sad pet grana raspoređujemo u preostale dvije moguće kutije, plavu i zelenu. Imamo $5 = 2 \cdot 2 + 1$, pa po Dirihleu slijedi da moraju biti bar 3 grane iste boje. Ovo možemo primjetiti na desnom grafu, u ilustraciji iznad, gdje smo b.u.o. izabrali da plavih grana imamo tri.

Ponovimo opet slično, b.u.o. fiksirajmo N_2, znamo da je ovaj čvor povezan i sa N_3 i N_6. Ako je ijedna od tih grana crvena ili plava, imati ćemo tri naučnika koji razgovaraju o istoj temi, s toga pretpostavimo suprotno: neka grane nisu ni crvene ni plave, dakle moraju biti obje zelene. Ovu, i sve dosadašnje pretpostavke koje smo napravili o bojama grana, možemo vidjeti u grafu ispod.



Ostalo je da grani između $N3$ i $N6$ dodjelimo boju, a koje god boje da je ta grana, ona će sa nekim od preostalih grana i čvorova da napravi jednobojni trougaoni graf, tj. imaćemo tri naučnika koji međusobno razgovaraju o istoj temi. Dokazali smo što smo trebali. □

Definicija–stablo: Stablo je povezan graf bez ciklusa.
Osnovne tvrdnje:

- Stablo ima bar 2 lista (osim ako se stablo sastoji od samo jednog čvora).
- Stablo sa n vrhova ima $n-1$ grana.
- Dodavanjem bilo koje grane u graf će se napraviti ciklus.
- Između svaka dva čvora postoji jedinstven put.
- Brisanjem bilo koje grane iz stabla graf postaje nepovezan.

Definicija: Binarno stablo je stablo u kojem svaki čvor ima najviše 2 djece.
Definicija: Potpuno binarno stablo je stablo u kojem svaki čvor, osim listova, ima tačno 2 djece.
Definicija: Visina binarnog stabla je dužina najdužeg puta od korijena tog stabla do nekog lista.

Zadaci (nastavak)

Zadatak 5. Dokazati da je graf T stablo ako i samo ako je to povezan graf i ima tačno $n-1$ grana, gdje je n broj čvorova tog grafa.

Rješenje.

"$\Rightarrow$": T je stablo pa je po definiciji stabla T povezan graf. Također imamo $|V| = n$, trebamo dokazati da je broj grana $|E| = n-1$, to ćemo uraditi uz pomoć PMI:

1) Baza: $|V| = 1$, ako imamo jedan čvor onda nemamo nijednu granu (stablo nema petlji), pa imamo $|E| = 0$ grana.

2) Pretpostavimo da $|E| = n-1$ ako $|V| = n$.

3) Posmatrajmo stablo G sa $|V| = n+1$ vrhova. Jer je G stablo, to znači da je ono povezan graf bez ciklusa, a to znači da G sadrži vrh koji je list (vrh stepena 1). Ako uklonimo taj list iz grafa, zajedno sa granom koja ga povezuje sa ostatkom grafa, dobijamo (pod)graf G' sa $|V_{G'}| = n$ vrhova, a po induktivnoj pretpostavci, iz toga slijedi da je broj grana $|E_{G'}| = n-1$. Ako vratimo uklonjeni vrh i granu, dobijamo da graf G ima $|E_G| = 1 + |E_{G'}| = 1 + (n-1) = n$ grana, što smo trebali i dokazati za ovaj pravac tvrdnje.[10]

"$\Leftarrow$": Neka je T povezan i $|E_T| = n-1$. Za ovaj pravac, biće dovoljno da pokažemo da T nema ciklusa. Znamo da $\sum d_i = 2(n-1)$. Dokažimo prvo da T sadrži list, pretpostavimo suprotno: za svaki čvor u grafu vrijedi $d_i \geq 2$. Tada bi slijedilo da $\sum d_i \geq 2n$, a to je kontradikcija sa $\sum d_i = 2(n-1)$. Dakle, pretpostavka $d_i \geq 2, \forall i$ nije tačna, mora postojati čvor stepena 1, tj. graf T mora sadržati list. Ako uklonimo taj list i granu koja ga povezuje s ostatkom grafa, ostaje nam graf T' sa $n-1$ vrhova i $n-2$ grane. Znamo da je T' stablo (pokaže se indukcijom), pa zbog tog i povezan graf. Ako vratimo uklonjeni list zajedno sa uklonjenom granom, znamo da se neće napraviti ciklus, jer je list čvor stepena 1, dakle T nema ciklusa. Dokazali smo da je T povezan graf bez ciklusa, dakle T je stablo, što je trebalo dokazati.

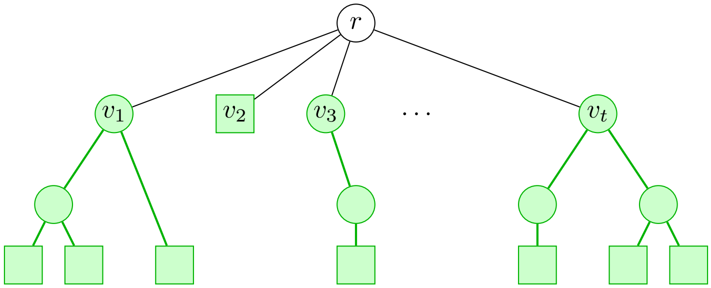
$\square$

[10] Ovaj postupak uklanjnanja čvora i odgovarajuće grane, pa ponovno dodavanje istih, je uobičajen način za rješavanje nekih zadataka sa grafovima/stablima.

Zadatak 6. Neka je t najveći stepen nekog čvora u stablu. Dokazati da to stablo sadrži bar t listova.

Rješenje.

Neka je dato stablo G i označimo sa r čvor koji ima najveći stepen t u stablu. Jedan prikaz takvog grafa možemo vidjeti ispod.[11]



Posmatrajmo podgrafove $G_1, \dots, G_t$ koji "počinju" sa čvorovima $v_1, \dots, v_t$ i "rastu" prema dolje (podgrafove smo označili zelenom bojom). Primjetimo da između podgrafova nema grana, jer inače bi imali ciklus u G. Podgrafovi $G_1, \dots, G_t$ su povezani, pa su i oni sami stabla. Znamo da svaki G_k (koji nije čvor) sadrži bar 2 lista (poznata osobina stabla), tako da kad zanemarimo čvorove v_k koji su listovi u G_k, a nisu listovi u G, opet imamo bar po list (u G) za svako od t stabala (opisane v_k zanemarujemo jer, iako mogu biti listovi u svojim podgrafovima, ne moraju biti listovi u grafu G, npr. v_3). Kako čvorove v_k možemo posmatrati kao "djecu" čvora r, tako podgrafove G_k možemo posmatrati kao "stablastu djecu" čvora r. Onda iznad rečeno možemo izreći i ovako: svako "stablasto dijete" mora imati list, a jer imamo t "stablaste djece", to znači da imamo bar t listova u stablu G. (Na grafu su kvadrati listovi, iako ih je prikazano više od t, slika može biti od pomoći da vidimo da ih mora biti bar t).

$\square$

Zadatak 7. Neka je T stablo sa tačno $k-1$ čvorova koji nisu listovi, sa po jednim čvorom stepena i za svako $2 \le i \le k$. Odrediti broj čvorova stabla T u zavisnosti od broja k.

Rješenje.

Neka su v_j, $j = \overline{1, k-1}$, čvorovi koji nisu listovi, i dodjelimo svaki stepen $i\colon 2 \le i \le k$, čvorovima v_j:

$$\deg(v_1) = 2, \quad \deg(v_2) = 3, \quad \dots, \quad \deg(v_{k-1}) = k$$

Označimo sada broj listova sa L, onda sveukupno čvorova imamo $|V| = k - 1 + L$. Graf T je stablo, pa imamo $|E| = k + L - 2$. Pored toga možemo iskoristiti lemu o rukovanju, koja nam daje $2|E| = \sum_{i=1}^{k-1} d_i = 2 + 3 + \cdots + (k-1) + L \cdot 1$. Primjetimo da nam desno fali samo sabirak 1 da bi imali sumu prvih $k-1$ prirodnih brojeva, a ta suma ima poznatu formulu $\frac{(k-1)k}{2}$. Sada izraz iznad možemo napisati na sljedeći način, i potom rješiti po L:

$$2(k + L - 2) = \frac{(k-1)k}{2} - 1 + L \iff L = \frac{(k-1)k}{2} - 2k + 3$$

Sada kada imamo i broj listova L izražen preko k, dobijamo i sveukupan broj čvorova izražen preko k: $|V| = k - 1 + L = k - 1 + \frac{(k-1)k}{2} - 2k + 3$. $\square$

[11] Radi učinkovitosti i jednostavnosti prikaza, očigledno smo za ovaj graf pretpostavili $t > 3$.

3 Prebrojavanja

Zadaci

Zadatak 1. Koliko se puta upotrijebi svaka cifra za pisanje svih dvocifrenih brojeva?

Rješenje.

Prebrojimo prvo koliko se puta cifra 0 upotrijebi u pisanju dvocifrenih brojeva. Svi brojevi u kojima se 0 pojavljuje su: $10, 20, 30, \ldots, 80, 90$. Dakle, 0 se upotrijebi 9 puta.

Neka je sada $c \neq 0$ proizvoljna i fiksirana cifra. Prebrojaćemo odvojeno brojeve oblika $\overline{cx}$ (tj. koliko se puta c upotrijebi kao desetica), i $\overline{xc}$ (tj. koliko se puta c upotrijebi kao jedinica), pri čemu je $x \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (ali $x \neq 0$ u drugom slučaju, jer 0 ne može biti desetica).

Posmatrajmo prvo brojeve oblika $\overline{cx}$. Za svako x cifra c se upotrijebi jednom, pa smo cifru c upotrijebili 10 puta. (Npr. za $c = 1$ imamo $10, 11, \ldots, 19$–deset upotreba).

Razmotrimo sada brojeve oblika $\overline{xc}$, gdje $x \neq 0$. Sada x uzima jednu od 9 vrijednosti pa se cifra c upotrijebi 9 puta. (Npr. za $c = 5$ imamo $15, 25, \ldots, 95$–devet upotreba).

Sabirajući dobivene rezultate slučajeva iznad, dobijamo da se svaka cifra $c \neq 0$ upotrijebi $10 + 9 = 19$ puta, a 0 se upotrijebi 9 puta.

□

Zadatak 2. Koliko ima trocifrenih brojeva kod kojih je cifra stotica jednaka cifri jedinica?

Rješenje.

Neka su $c \neq 0$ i x proizvoljne cifre, zanimaju nas brojevi oblika $\overline{cxc}$. Fiksirajmo neko $c \neq 0$, onda za svako x imamo jedan trocifren broj $\overline{cxc}$, što nam daje 10 brojeva. A jer za cifru c imamo 9 mogućnosti, sveukupno trocifrenih brojeva željenog oblika imamo $10 \cdot 9 = 90$.

□

Zadatak 3. Koliko postoji petocifrenih parnih palindroma?

Rješenje.

Zanimaju nas brojevi oblika $\overline{pabap}$, pri čemu je $p \in \{2, 4, 6, 8\}$, a a, b su proizvoljne cifre. Za p imamo 4 mogućnosti, dok za a, b imamo po 10 mogućnosti, onda po osnovnom principu prebrojavanja imamo $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ petocifrenih parnih palindroma.

□

Zadatak 4. Koliko ima desetocifrenih brojeva kojima je zbir cifara paran?

Rješenje.

Primjetimo da parnost zbira $C_1 + \cdots + C_{10}$ ovisi od parnosti cifre C_{10}. Prikažimo broj mogućnosti za svaku cifru C_k, ispod k-te cifre:

$$\begin{array}{cccccccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 & C_9 & C_{10} \\ 9 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & a \end{array}$$

Iznad rečeno nas navodi da razmotrimo dva moguća slučaja:
1) ako $2 | (C_1 + \cdots + C_9)$ i **2)** ako $2 \nmid (C_1 + \cdots + C_9)$.

Ako vrijedi **1)**, zbir svih cifara je paran ako $C_{10} \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, imamo 5 mogućnosti. Ako vrijedi slučaj **2)**, onda mora biti $C_{10} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, opet 5 mogućnosti. Dobijamo da je $a = 5$, pa ima $9 \cdot 10^8 \cdot 5$ traženih brojeva. □

Zadatak 5. Koliko ima desetocifrenih brojeva kojima je proizvod cifara paran?

Rješenje.

Neka je S broj svih mogućih desetocifrenih brojeva, neka je p broj desetocifrenih brojeva kojima je proizvod cifara paran, i neka je n broj desetocifrenih brojeva kojima je proizvod cifara neparan. Primjetimo da imamo $S = p + n \iff p = S - n$. Upravo posljednju jednakost ćemo iskoristiti da riješimo ovaj zadatak, nađimo S i n.

Sveukupno desetocifrenih brojeva imamo $S = 9 \cdot 10^9$. Što se tiče n, da bi proizvod cifara bio neparan, svi faktori moraju biti neparni, dakle svaka od deset cifara može uzimati neku od vrijednosti iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, tj. imamo 5 mogućnosti za svaku od 10 cifri, pa je $n = 5^{10}$.

Desetocifrenih brojeva kojima je proizvod cifara paran imamo $p = 9 \cdot 10^9 - 5^{10}$.

□

Zadatak 6. U ravni je dato n tačaka, tako da nikoje tri nisu kolinearne.

a. Koliko pravih određuju te tačke? **b.** Koliko trouglova određuju te tačke?

Rješenje.

a. Neka su naše tačke $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Fiksirajmo prvo tačku T_1 i povucimo sve moguće prave kroz tačku T_1 i sve ostale tačke. Za svaku od ostalih tačaka imamo jednu pravu (jer su tačke nekolinearne), pa ovako povučenih pravih imamo $n - 1$. Fiksirajmo sada tačku T_2, i povucimo prave kroz $T2$ i sve ostale tačke osim T_1, s obzirom da smo tu pravu već povukli iznad. Sada imamo $n - 2$ preostalih tački, i za svaku od njih po jednu pravu, što nam daje $n - 2$ pravih. Ako nastavimo sa T_3, imaćemo slično $n - 3$ pravih. Na kraju nam ostaju tačke T_{n-1} i T_n, a kroz njih možemo povući jednu pravu. Dakle dobijamo

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 \iff \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{pravih}$$

Mogli smo primjetiti i da pravih ima onoliko, koliko i načina da izaberemo dvije od datih n tačaka, a tih načina ima $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, dobijamo isti rezultat.

b. Trougao je jedinstveno određen sa tri nekolinearne tačke, pa to znači da date tačke određuju onoliko trouglova na koliko načina možemo od n tačaka izabrati neke tri tačke, a tih načina ima $\binom{n}{3}$.

□

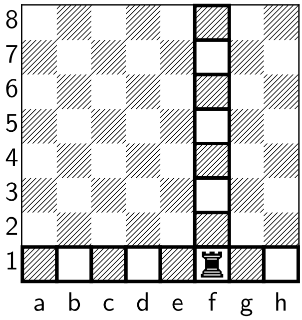
Zadatak 7. Na koliko se načina može 8 topova postaviti na šahovsku ploču da se međusobno ne napadaju?

Rješenje. Daćemo dva kratka rješenja i jedno detaljno.

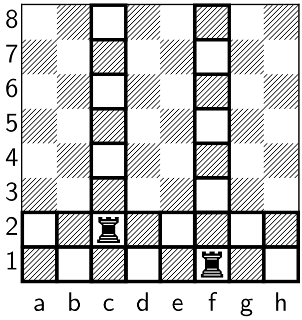
Kratko rješenje 1. Svaki red ima samo jednog topa, pa je broj načina da topove rasporedimo po redovima 8!. Isto vrijedi za kolone, pa je broj načina da ih rasporedimo po kolonama 8!. To nam daje $8! \cdot 8!$ načina. Međutim topovi nisu označeni (svi su isti, ne možemo ih razlikovati), pa rezultat moramo podjeliti sa brojem mogućih označivanja topova, a to je 8!. Dakle, odgovor je $\frac{8! \cdot 8!}{8!} = 8!$.

Kratko rješenje 2. Prvog topa možemo staviti na $8 \cdot 8 = 64$ mogućih polja. Gdje god da ga stavimo, gubimo jedan red i kolonu, ostaje nam $7 \cdot 7 = 49$ polja za idućeg topa. Nastavljajući slično, dolazimo do sedmog topa za kojeg imamo $2 \cdot 2 = 4$ moguća polja, a za osmog $1 \cdot 1 = 1$ polje. Ovo rezonovanje daje $(8!)^2$ načina. Međutim, prvog topa smo mogli staviti na mjesto drugog, a drugog na mjesto prvog i dobili bi isti raspored, tj. trebamo dobijeno podijeliti sa brojem načina da međusobno ispremećemo topove, a taj broj je 8!. Dobijamo $\frac{8! \cdot 8!}{8!} = 8!$.

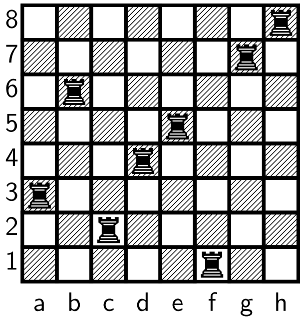
Detaljno rješenje. Top je figura koja se kreće horizontalno i vertikalno, drugim riječima, ako su dva topa u istom redu ili koloni, oni će se međusobno napadati. Naš cilj je da prebrojimo načine kada nikoja dva od osam topova nisu u istom redu i koloni. U svakom redu mora biti samo jedan top, pa fiksirajmo prvo redove u kojima će topovi biti: stavimo prvog topa u prvi red, drugog u drugi itd. Kada smo izabrali redove, za svakog topa moramo izabrati kolonu. Za prvog topa imamo 8 opcija, izaberimo kolonu f. Dakle, top je u polju f1 (vidi sliku→).



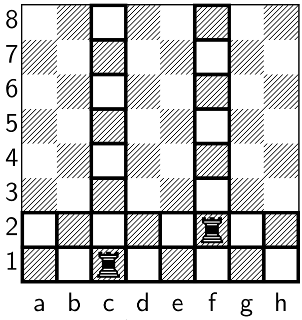
Drugi top je u drugom redu i možemo ga staviti u bilo koju kolonu osim kolone f, dakle imamo 7 opcija, stavimo ga u kolonu c (vidi sliku →). Slično za trećeg topa imamo 6 opcija jer su kolone c i f već pod napadom topova u tim kolonama. Možemo nastaviti slično sve do sedmog topa, za kojeg ćemo imati 2 opcije, i na kraju za osmog topa ćemo imati samo 1 opciju, jer će sve druge kolone biti zauzete.



Za svaku od 8 kolona za prvog topa, mogli smo odabrati bilo koju od 7 preostalih kolona za drugog topa, a potom za svaku od tih smo mogli odabrati bilo koju od 6 preostalih kolona za trećeg topa itd. Ovo rezonovanje nam govori da trebamo pomnožiti moguće opcije, tj. imamo $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots 2 \cdot 1 = 8!$ načina da postavimo topove, a da se ne napadaju. Na slici imamo jednu postavku 8 nenapadajućih topova →.



Primjetimo bitnu stvar: kada smo na početku birali i fiksirali redove, imali smo 8! načina da to uradimo, ali da smo to uzeli u obzir imali bi viška brojanja, jer se topovi ne razlikuju (nisu označeni). Uvjerimo se u ovo: zamijenimo redove koje smo dodijelili prva dva topa: prvi top ostaje u koloni f, ali je sad u drugom redu, i slično je drugi top sad u polju c1 (vidi sliku →). Ali, ovaj slučaj smo već prebrojali, jer smo prvog topa (kojeg smo bili stavili u prvi red) mogli staviti u kolonu c, a drugog u kolonu f.



(Zamislimo da 8 topova na ploči iznad imaju "lažne" oznake T_k. Ako zamijenimo neke topove jedne s drugima, raspored se ne mijenja, jer su oznake lažne, ali nam pomažu da mislimo o zamjenama (npr. $T_1 \to T_2$). Tih zamjena imamo 8!, ali jer ne mijenaju raspored, ne želimo ih brojati. Međutim, u $8! \cdot 8!$ su ubrojane ovakve zamjene, jer za svaki od 8! načina koji smo dobili za fiksirani odabir redova, brojano je i 8! opisanih zamjena, što bi bilo validno da se topovi razlikuju.) □

Zadatak 8. Na koliko se načina može 153 topa postaviti na šahovsku ploču dimenzije 2023×2023 tako da se međusobno ne napadaju?

Rješenje.

Možemo prvo izabrati red za svakog topa, načina da to uradimo imamo $\binom{2023}{153}$. Što se tiče kolona, za prvog topa imamo 2023 kolone u koje ga možemo postaviti, za drugog 2022 kolone, itd. do 153. topa, za kojeg imamo $2023 - 152$ kolone. Dobijamo da imamo $\binom{2023}{153} \cdot 2023 \cdot 2022 \cdot \ldots \cdot (2023 - 153)$ načina da rasporedimo topove.

$\square$

Zadatak 9.

a. Koliko ima devetocifrenih brojeva koji se sastoje od po tri cifre 1, 2 i 3?

b. Koliko ima devetocifrenih brojeva koji se sastoje od tri trojke istih cifara, različitih od 0?

Rješenje.

a. Zanimaju nas brojevi kao što su npr. 111222333 ili 312312213 itd. Ovdje možemo odmah primjeniti multinomijalni koeficijent: ukratko, dobijamo $\frac{9!}{3!3!3!}$.

Rezultat iznad možemo razumjeti na sljedeći način *(ako vam je multinomijalni koeficijent poznat, slobodno preskočite ovaj dio)*:

Imamo multiskup $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3\}$ od 9 elemenata i treba da ih rasporedimo na 9 pozicija, to možemo uraditi na 9! faktorijel načina, međutim ovaj način brojanja tretira tri jedinice kao različite cifre (i slično za cifre $2, 3$). Npr. sa 9! smo prebrojali $1_1 1_2 1_3 222333$ i $1_2 1_3 1_1 222333$ kao različite brojeve, a to ne želimo jer $1_1 = 1_2 = 1_3 = 1$. S toga za svaku od cifri $1, 2, 3$ moramo eliminisati višak brojanja. Primjetimo da za svaku cifru imamo 3! mogućih rasporeda među istim ciframa, što možemo fino vidjeti u primjeru ispod:

$$1_1 1_2 231_3 2233 \quad 1_1 1_3 231_2 2233$$
$$1_2 1_1 231_3 2233 \quad 1_2 1_3 231_1 2233$$
$$1_3 1_1 231_2 2233 \quad 1_3 1_2 231_1 2233$$

su sve isti brojevi, a ima ih $6 = 3!$ jer skup $\{1_1, 1_2, 1_3\}$ ima 3! permutacija. Da smo u primjeru iznad još indeksirali i cifre $2, 3$ i uzeli u obzir sve moguće rasporede dvica (među dvicama), i sve moguće rasporede trica (među tricama), dobili bi $3! \cdot 3! \cdot 3!$ istih brojeva. Međutim to je samo za broj u primjeru iznad–i za broj, (npr.) 232131132, kao i svaki drugi traženog oblika, bi imali $3! \cdot 3! \cdot 3!$ istih brojeva. Zbog toga moramo sveukupan broj 9! djeliti sa $3! \cdot 3! \cdot 3!$.

Alternativno rješenje za a. Imamo 9 pozicija na koje trebamo rasporediti cifre $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3$. B.u.o. rasporedimo prvo jedinice, trebamo izabrati 3 od 9 pozicija, dakle jedinice možemo rasporediti na $\binom{9}{3}$ načina. Rasporedimo sada dvice: pozicije za njih biramo od $6 = 9 - 3$ pozicija, jer nam jedinice već zauzimaju neke 3 pozicije, pa dvice možemo rasporediti na $\binom{6}{3}$ načina. Za trice nam preostaju 3 pozicije, i njih možemo rasporediti na $\binom{3}{3} = 1$ način. Dobijamo da ima $\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \frac{9\cdot8\cdot7}{3!}\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}\frac{3\cdot2\cdot1}{3!}$ devetocifrenih brojeva željenog oblika (isti rezultat kao iznad).

b. Prvo treba da izaberemo od koje tri cifre ćemo "graditi" devetocifreni broj. Od 9 cifara, 3 cifre možemo izabrati na $\binom{9}{3}$ načina. Ako izaberemo cifre $1, 2, 3$, onda imamo situaciju kao pod **a.**, ali rezultat koji smo dobili pod **a.** ne ovisi od cifara $1, 2, 3$, naime isto bi dobili i za bilo koje druge tri cifre (kao npr. $2, 5, 9$). Pa devetocifrenih brojeva koji se sastoje od tri trojke istih cifara različitih od 0 imamo $\binom{9}{3} \cdot \frac{9!}{3!3!3!}$. $\square$

4 Kombinatorni identiteti

Binomna formula:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i\end{aligned}$$

Paskalova formula: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ ili $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Zadaci

Zadatak 1. Neka $2n$ igrača učestvuje na teniskom turniru. Pronađite ukupan broj mogućih parova za prvu rundu takmičenja.

Rješenje.

Prvi način.

Možemo brojati na sljedeći način: za prvi par imamo $\binom{2n}{2}$ načina, za drugi par biramo dva igrača od $2n-2$ igrača, jer smo dvojicu već odabrali za prvi par, dakle imamo $\binom{2n-2}{2}$ načina, itd. nastavljajući ovako, dolazimo do zadnjeg para za kojeg imamo $1 = \binom{2}{2}$ način. Broj načina trebamo izmnožiti jer za svaku od mogućnosti prvog para mogli smo imati bilo koju od mogućnosti drugog para itd. Ali, primjetimo da je redoslijed parova nebitan (nije bitno koji je par prvi, koji drugi), pa zbog toga dobijeno trebamo podijeliti sa $n!$ ($n!$ jer imamo n parova). Dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\binom{2n-4}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{4\cdot3}{2}\binom{2}{2}}{n!} &= \frac{\frac{2n(2n-1)}{2}\,\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\cdots\frac{4\cdot3}{2}\,\frac{2}{2}}{n!} \\ &= \frac{\frac{\cancel{2}n(2n-1)}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}(n-1)(2n-3)}{\cancel{2}}\cdots\frac{\cancel{4}\cdot3}{\cancel{2}}\,\frac{2}{2}}{n!} \\ &= \frac{\cancel{n!}(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1}{\cancel{n!}}\end{aligned}$$

Drugi način.

Izaberimo prvog igrača. Postoji $2n-1$ igrača s kojima ga možemo upariti. Ako pretpostavimo da je prvi igrač uparen s nekim, ostaje nam $2n-2$ igrača. Ponavljamo postupak: biramo drugog igrača. Pošto igrači ne mogu biti upareni sami sa sobom, drugog igrača možemo upariti sa $2n-3$ igrača. Nakon ta dva uparivanja, ostaje nam $2n-4$ igrača, pa analogno postoji $2n-5$ mogućih uparivanja za trećeg igrača. Nastavljajući ovako, na kraju ostaju 2 igrača, a pretposljednjem igraču preostaje samo jedna moguća opcija — posljednji igrač.

Budući da smo za svakog od $2n-1$ izbora prvog igrača mogli izabrati bilo kojeg od $2n-3$ igrača za drugog igrača, i tako dalje, moramo pomnožiti broj mogućnosti, odnosno dobijamo:

$$(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1$$

□

Zadatak 2. Iz špila od 52 karte izvlači se 10 karata. Koliko ima različitih izbora? U koliko slučajeva se među izvučenim kartama nalazi:

a) tačno jedan kec; b) bar jedan kec; c) tačno dva keca; d) bar dva keca?

Rješenje. Općenito, različitih izbora imamo $\binom{52}{10}$.

a): Izvadimo sve četiri keca, ostaje nam 48 karata, od njih biramo 9, dakle imamo $\binom{48}{9}$ izbora, ali jer izabranih 9 možemo kombinovati sa svakim od izvađenih kečeva, dobijeno množimo sa 4, rezultat je $\binom{48}{9} \cdot 4$.

b): Ovo ćemo rjesiti uz pomoć komplementa od onog što se traži.

(U)ukupno= (S)načina sa bar jednim kecom + (S^C)načina bez ijednog keca

Ukupno načina je $\binom{52}{10}$, načina bez keca je $\binom{48}{10}$ (izvadimo kečeve, pa izaberemo 10 karata), pa uvrštavajući imamo $S = U - S^C \iff S = \binom{52}{10} - \binom{48}{10}$.

c): Slično kao pod **a)**, opet izvadimo sve kečeve, ali ovaj put biramo 8 karata, jer tačno dva mjesta moraju ostati slobodna za dva keca. Dva keca od četiri možemo izabrati na $\binom{4}{2}$ načina, pa sveukupno različitih izbora imamo $\binom{48}{8}\binom{4}{2}$

d): Opet preko komplementa, koristimo istu notaciju $U = S + S^C$, i tražimo S. U ovom slučaju S^C je broj izbora sa strogo manje od dva keca, tj. broj izbora sa tačno jednim kecom (uradili u **a)**) ili bez ijednog keca (trebalo nam u **b)**). Traženi rezultat je $\binom{52}{10} - \binom{48}{9} \cdot 4 - \binom{48}{10}$.

□

Zadatak 3. Na koliko načina možemo izabrati dva neprazna disjunktna podskupa iz skupa od n elemenata?[12]

Rješenje.

Prvi način. *(Ako vas samo zanima algebarski izraz koji broji traženo, preskočite ovu stranicu.)*

Kao u prethodnom zadatku, i ovdje ćemo koristiti trik "izvadi pa prebroji". Neka je S dati skup, znamo $|S| = n, |\mathcal{P}(S)| = 2^n$. Možemo li prebrojati koliko ima načina da izaberemo dva neprazna disjunktna podskupa skupa S, ako fiksiramo da je jedan od njih 1-član? Načina da izaberemo 1-član podskup imamo $n = \binom{n}{1}$. Odaberimo i fiksirajmo jedan takav skup. Sada iz S izvadimo element koji je u odabranom 1-članom skupu, ostaje nam $n-1$ elemenata, i što je još bitnije, partitivni skup tog skupa onda ima 2^{n-1} elemenata, i svi skupovi u njemu će biti disjunktni sa odabranim 1-članim skupom. Dakle, za 1-člane podskupove dobijamo $\binom{n}{1}(2^{n-1} - 1)$ načina, pri čemu smo jedinicu oduzeli jer ne želimo brojati prazan skup. Ovaj postupak možemo vidjeti na primjeru:

Neka je dati skup $A = \{a, b, c\}$, onda je

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Imamo 3 izbora za 1-člane skupove, odaberimo skup $\{a\}$ i uklonimo elemente tog skupa iz skupa A, dobijamo $A \setminus \{a\} = \{b, c\}$, i

$$\mathcal{P}(A \setminus \{a\}) = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

Primjetimo da skup $P(A \setminus \{a\})$ sadrži upravo one skupove s kojima je $\{a\}$ disjunktan u $\mathcal{P}(A)$.

Analogno postupamo za 2-člane skupove, njih ima $\binom{n}{2}$, ali jer sad vadimo dva elementa iz datog skupa, partitivni skup će nakon vađenja imati 2^{n-2} elemnata, pa skupova koji čine disjunktne skupove sa 2-članim skupovima imamo $\binom{n}{2}(2^{n-2} - 1)$.

[12]Preporuka: prvo uradite zadatak 4. pod a)-kombinatorno (str. 19).

Nastavljajući slično za 3-člane, 4-člane, itd. podskupove, i sabirajući ove disjunktne slučajeve, dobijamo sljedeći izraz:

$$\underbrace{\binom{n}{1}(2^{n-1}-1)}_{\text{br. načina za 1-člane}} + \underbrace{\binom{n}{2}(2^{n-2}-1)}_{\text{br. načina za 2-člane}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n-1}(2^{1}-1)}_{\text{br. načina za } (n-1)\text{-člane}} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}2^{n-i}\right) - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\right)}_{=2^n-2} =$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}\cdot 1^{i}\right)}_{=(2+1)^n=3^n\text{ , i pomjerili smo granice}} -2^n-1-2^n+2 =$$

$$3^n-2^{n+1}+1$$

Međutim, u ovom rezultatu smo sve brojali duplo. Primjetimo da smo u slučaju 1-članih kad smo fiksirali $\{a\}$ imali $\{\{a\},\{b\}\}$ kao disjunktan par, a kad smo fiksirali $\{b\}$, imali smo $\{\{b\},\{a\}\}$, što su isti skupovi. Slično, kad smo fiksirali 2-člani skup $\{a,c\}$, prebrojali smo $\{\{a,c\},\{b\}\}$, ali isto smo prebrojali kad smo fiksirali $\{b\}$ u 1-članim slučajevima. Dakle, moramo rezultat podijeliti sa 2, dobijamo: $\frac{3^n-2^{n+1}+1}{2}$.

Drugi način.

Neka je S dati skup. Neka $D=\{(X,Y): X,Y\subseteq S \wedge X,Y\neq\varnothing \wedge X\cap Y=\varnothing\}$, zanima nas broj elemenata u skupu D. Ako hoćemo da elementi skupa S prave disjunktne skupove, onda svaki element $s\in S$ ima jednu od 3 opcije:

$$1)\ s\in X\ i\ s\notin Y \quad 2)\ s\in Y\ i\ s\notin X \quad 3)\ s\notin X\ i\ s\notin Y$$

To nam daje onoliko mogućih disjunktnih skupova koliko ima i $n-torki$ od 3 elementa, a ima ih 3^n.

Npr. neka je A skup iz prvog rješenja i neka $X=\{a,b\}, Y=\{c\}$. Imamo $a\in X, b\in X, c\in Y$. Dakle, trojka (X,X,Y) nam je "dala" disjunktan skup. Ovdje je bitno primjetiti da će i bilo koja druga od 3^n trojki dati disjunktne skupove, npr. (Y,X,Y) daje $X=\{b\}, Y=\{a,c\}$, ili (X,X,X) daje $X=\{a,b,c\}$ i $Y=\varnothing$.[13]

Ovaj zadnji primjer nam upravo govori da 3^n broji trojke koje daju parove (X,Y), a u kojima je $X=\varnothing$ ili $Y=\varnothing$, a te slučajeve ne želimo brojati jer zadatak traži da prebrojimo neprazne disjunktne skupove. Preostaje nam da prebrojimo ove nevalidne slučajeve i da ih oduzmemo od 3^n.

Ako je $X=\varnothing$, onda za svaki element opcija 1) otpada, pa imamo 2 umjesto 3 opcije, što nam daje 2^n nevalidnih disjunktnih skupova X,Y. Slično vrijedi kad $Y=\varnothing$, pa imamo još 2^n nevalidnih. Za sad imamo $3^n-2^n-2^n$. Ali, sad kad smo brojali nevalidne slučajeve, par $(\varnothing,\varnothing)$ smo prebrojali dva puta (jednom za X, jednom za Y), a trebali smo jednom, pa trebamo dodati 1 jer smo previše oduzeli, to nam daje $3^n-2^n-2^n+1=3^n-2^{n+1}+1$ (isti rezultat kao iznad). Na kraju, jer parovi (X,Y) i (Y,X) predstavljaju ista dva disjunktna skupa, moramo još podijeliti sa 2, konačno dobijamo $\frac{3^n-2^{n+1}+1}{2}$. □

[13] Za skup od n elemenata, trojka iz ovog primjera postaje n-torka

Zadatak 4. Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijede identiteti:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ **b)** $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Rješenje.

a)–algebarski: preko binomne formule $(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} \cdot 1^i$

a)–kombinatorno: Odredimo prvo šta lijeva strana jednakosti broji. Neka je dat skup S i $|S| = n$. Primjetimo da lijeva strana broji podskupove skupa S, na način da podskupove broji po broju članova, tj. prvi sabirak s lijeva broji podskupove sa 0 elemenata (prazan skup–imamo samo jedan, $\binom{n}{0} = 1$), drugi sabirak broji 1-člane podskupove, treći 2-člane,..., predzadnji sabirak $\binom{n}{n-1}$ broji $(n-1)$-člane i zadnji broji n-člane. Ovo uistinu broji podskupove skupa S jer $\mathcal{P}(S)$ možemo prikazati kao disjunktnu uniju 0-članih, 1-članih itd. podskupova od S. Formalno, neka je $A_k = \{A \subseteq S : |A| = k, k = \overline{1,n}\}$, onda imamo $|A_k| = \binom{n}{k}, \forall k$ i $\mathcal{P}(S) = \biguplus_{k=0}^{n} A_k$, dobijamo $\sum_{k=0}^{n} |A_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = |\mathcal{P}(S)|$.

Pokažimo da i 2^n broji podskupove skupa S. Kao prvo, označimo elemente skupa S sa $s_1, \ldots, s_n$. Sada ćemo iskoristiti to da je svaki podskup od S jedinstveno određen n-torkom jedinica i nula, gdje jedinica na i-toj poziciji znači da s_i pripada podskupu kojeg ta n-torka određuje, a 0 da ne pripada. Za skup $B = \{x, y, z\}$ od $n = 3$ elementa ovo možemo vidjeti u primjeru ispod.

x	y	z	Podskup
0	0	0	$\emptyset$
1	0	0	$\{x\}$
0	1	0	$\{y\}$
0	0	1	$\{z\}$
1	1	0	$\{x, y\}$
1	0	1	$\{x, z\}$
0	1	1	$\{y, z\}$
1	1	1	$\{x, y, z\}$

Koliko imamo n-torki, ako za svaki element imamo 2 opcije? Takvih n-torki imamo 2^n, to znači da S ima 2^n podskupova, identitet je dokazan.

b–kombinatorno: Kao što smo vidjeli pod **a)**, $\binom{n+1}{k+1}$ broji koliko skup od $n+1$ elemenata ima $(k+1)$-članih podskupova (u nastavku ćemo ih jednostavno zvati $(k+1)$-podskupovi). Pokažimo da to isto broji lijeva strana.

Neka je S dati skup od $n+1$ elemenata. Elemente skupa S možemo označiti sa O_i i poredati[14] ih na sljedeći način: $O_1 \prec O_2 \prec \cdots \prec O_{n+1}$. Ovaj poredak će nam biti od ključne važnosti. S obzirom da na desnoj strani brojimo $(k+1)$-podskupove, oni nas i ovdje zanimaju, s toga posmatrajmo samo njih.

Svi $(k+1)$-podskupovi imaju jedinstven najveći element[15], cilj će nam biti da za svaki $(k+1)$-podskup fiksiramo njegov najveći element, npr. O_j, i prebrojimo koliko ukupno ima $(k+1)$-podskupova u kojima je O_j najveći. (Na kraju zadatka ima primjer koji ilustrira postupak koji slijedi.)

[14] Za svaki skup postoji dobro uređenje koje inducira relaciju strogog poretka. Ovdje smo uveli relaciju strogog totalnog poretka: $i \prec j \iff O_i \prec O_j$, $\forall i \neq j$ (npr. ako $S = \{1, 2, 3\}$, onda možemo jednostavno koristiti standardni poredak $1 < 2 < 3$). Inače, uvođenje poretka je često korisna taktika za rješavanje nekih zadataka.

[15] U odnosu na uvedenu relaciju

Neka je A proizvoljan $(k+1)$-podskup od S i neka $\max(A) = O_j$, onda A bez elementa O_j ima k elemenata (tj. $|A \setminus \{O_j\}| = k$). Na koliko načina možemo izabrati ovih k elemenata, a da O_j ostane maksimalan? Odgovor na ovo pitanje je odgovor i na pitanje označeno crvenom bojom. Manjih elemenata od O_j u S ima $j-1$, naime to su elementi $O_1, \ldots, O_{j-1}$, dakle biramo k od $j-1$ elemenata, pa podskupova u kojima je O_j maksimalni element imamo:

$$\binom{j-1}{k} \tag{1}$$

Ako ovo uradimo za svaki $(k+1)$-podskup $A \subseteq S$, i saberemo rezultate, dobićemo traženo. Radi konciznosti do sad nismo kvantificirali j (iako smo trebali), ali primjetimo sada da mora biti $k+1 \leq j \leq n+1$. Sabirajući izraz (1) za svako j, dobijamo sumu:

$$\sum_{j=k+1}^{n+1} \binom{j-1}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k}$$

Ova suma uistinu broji koliko ima $(k+1)$-podskupova zbog sljedećeg: neka je $\mathcal{S}_{k+1} \subseteq \mathcal{P}(S)$ skup svih podskupova od $k+1$ elemenata, (tj. skup čiju kardinalnost i lijeva i desna strana broje), onda uz pomoć iznad opisanog postupka možemo dobiti particiju ovog skupa (detalje definisanja particije preskačemo). To jest, možemo dobiti skup nepraznih disjunktnih skupova S_j, takvih da vrijedi $|S_j| = \binom{j-1}{k}$ i $\biguplus_{k+1}^{n+1} S_j = \mathcal{S}_{k+1}$, iz čega slijedi $\sum_{j=k+1}^{n+1} |S_j| = |\mathcal{S}_{k+1}|$, što smo i trebali pokazati.[16]

Primjer.

Neka $n = 3, k = 1$ *i* $T = \{1, 2, 3, 4\}$. *Onda desna strana broji koliko ima* 2*-članih podksupova,* $\binom{4}{2} = 6$. *Posmatrajmo sada sve* 2*-člane podskupove od* T*:*

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$$

Idući s lijeva, najveći elementi su: $2, 3, 4, 3, 4, 4$. *Možemo odmah vidjeti koliko se koji element puta ponavlja kao najveći element, ali iskoristimo metod opisan iznad. Znamo da je* 3 *najveći element u nekom od skupova iznad, svaki takav skup ima oblik* $\{X, 3\}$*, a za* X *imamo* $\binom{3-1}{1} = 2$ *opcije tj.* 1 *i* 2*, pa skupova u kojima je* 3 *najveći element ima* 2*. Skup* $S_{j=3}$ *iz zadnjeg dijela objašnjenja iznad bi izgledao ovako* $S_3 = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

$\square$

[16]Poenta ovog paragrafa je da ukaže na disjunktnost slučajeva, i činjenicu da zbir tih slučajeva uistinu daje broj elemenata skupa $\mathcal{S}_k + 1$.

5 Eulerov ciklus

6 Princip uključenja i isključenja

7 Particije i Stirlingovi brojevi druge vrste

8 Linearne rekurzivne jednačine

9 Funkcije izvodnice

10 Latinski, magični kvadrat, razni zadaci