

**Univerzitet u Sarajevu**  
Prirodno-matematički fakultet  
Odsjek za matematiku i kompjuterske nauke

Predmet: Historija matematike  
Profesorica: Dr. Senada Kalabušić

**Historija topologije**

Atif Degirmendžić

Indeks: 5734/m

2026

**Sažetak**

U ovom radu ćemo izvršiti krakti pregled historije topologije kroz dvije linije historijskog razvoja, te kako je došlo do njihove sinteze:

1. *Geometrijsko-kombinatornu* topologiju
2. *Generalnu*<sup>1</sup> topologiju

Geometrijsko-kombinatorna topologija nastaje iz proučavanja nekih osobina poliedara. Generalna topologija je generalizacija analize na proizvoljne skupove i razvija se zajedno sa teorijom skupova. Prva linija počinje par stoljeća prije druge i nije bila u potpunosti shvaćena kao zasebna matematička disciplina, odvojena od geometrije. Kao takva, inicijalno nije imala puno direktnog uticaja na drugu liniju razvoja, i nastanak "topologije" kao formalne matematičke discipline u 19. stoljeću. Ali, kao što ćemo vidjeti, brzo će biti shvaćeno da dvije linije konvergiraju ka istoj disciplini, naime topologiji kakvu danas poznajemo. Na kraju ćemo se osvrnuti na uticaj topologije na modernu matematiku od sredine prošlog stoljeća pa do danas.

---

<sup>1</sup>poznatu i pod nazivom "point-set topology" na engleskom

# Sadržaj

<b>1 Topologija i geometrija</b>	<b>3</b>
1.1 Uvod . . . . .	3
1.2 Dekartove i Eulerove formule za poliedre . . . . .	3
1.3 Klasifikacija površi . . . . .	5
1.4 Površi opremljene geometrijom . . . . .	8
1.5 Fundamentalna grupa . . . . .	12
1.6 Poincaréova hipoteza . . . . .	13
1.7 Prelaz . . . . .	18
<b>2 Generalna topologija</b>	<b>19</b>
2.1 Georg Cantor i počeci point-set topologije . . . . .	19
2.2 Frechet i metrički prostori . . . . .	20
2.3 Felix Hausdorff i okoline . . . . .	22
2.4 Prelaz . . . . .	25
<b>3 Sinteza</b>	<b>26</b>
3.1 Dimenzija . . . . .	26
3.2 Peano, Jordan i njihove krive . . . . .	28
3.3 Hurwitz i njegov program . . . . .	30
3.4 Hausdorff i inicijalizacija sinteze . . . . .	31
3.5 Brouwerov doprinos, povratak dimenziji, i počeci algebarske topologije . . . . .	31
3.6 O mnogostrukostima . . . . .	35
<b>4 Uticaj na modernu matematiku</b>	<b>37</b>
4.1 Algebarska topologija i teorija kategorija . . . . .	37
4.2 Brouwerov intuicionizam i topologija . . . . .	40
<b>Literatura</b>	<b>43</b>

# 1 Topologija i geometrija

Historijski razvoj geometrijske topologije u ovoj sekciji većinski prati ekspoziciju Stillwella [Sti10], sa malim adaptacijama i prijevodima. Mišljenja smo da je ovo odlično djelo dovoljno iscrpno za ovaj dio, dok će u ostalim dijelovima literatura biti dosta bogatija.

## 1.1 Uvod

Teorija generalne topologije, iako važna za teoriju skupova i analizu, nema geometrijsku prirodu sama po sebi, tako da geometrijskom topologijom možemo smatrati onu granu topologije koja se bavi neprekidnim transformacijama na  $\mathbb{R}^n$  ili na podskupovima od istog. U nastavku kada kažemo "geometrijska topologija"<sup>2</sup>, "geometrijska" će nam služiti kao podsjetnik da diferencira ovu granu topologije od ostalih, ali bitno je napomenuti da je ta geometrija još uvijek diskretne i kombinatorne prirode. Naime, geometrijski kvantiteti poput dužine, uglova i zakrivljenosti podložni su neprekidnim promjenama i ne mogu biti invarijantni pod neprekidnim transformacijama, stoga se topologija sa njima ne bavi. Relevantni kvantiteti u topologiji su oni koji su invarijantni pod neprekidnim transformacijama, to je recimo broj "dijelova" figure ili broj "rupa" (genus) u figuri. Ispostaviće se da kombinatorne strukture topologije imaju svoj odraz u kombinatornim strukturama u običnoj geometriji, kao što su poliedri i teselacije. Na primjer, kocka i sfera su topološki isti objekti, i Eulerova karakteristika je topološka invarijanta pa kocka i sfera moraju imati istu Eulerovu karakteristiku ( $E_K = E_S$ ). Naime, jer je Eulerova karakteristika kocke  $E_K = 8 - 12 + 6 = 2$ , to mora biti i  $E_S = 2$ . S druge strane, torus možemo dobiti topološkom tehnikom ljepljenja kvadrata (Slika 3), pa torus ima 2 strane, jedan vrh i jedno lice, stoga je Eulerova karakteristika torusa  $E_T = 1 - 2 + 1 = 0$ . U historiji geometrijske topologije bavićemo se samo topologijom površi, čiji historijski početak je upravo teorija poliedara [Sti10, str. 468].

## 1.2 Dekartove i Eulerove formule za poliedre

Čini se da je prvu topološku osobina poliedara prvi otkrio Dekart 1630. godine, iako original dokumenta nije sačuvan, sadržaj dokumenta je poznat jer je Leibniz 1676. napravio kopiju Dekartovog dokumenta. Istu osobinu je neovisno od

---

<sup>2</sup>Ovo napominjemo jer danas postoji čitava disciplina pod imenom geometrijska topologija, o kojoj ovdje nije riječ.

Dekarta otkrio Euler 1752., u eksplicitnom obliku, i ta osobina je sada poznata pod nazivom Eulerova karakteristika. U nastavku dajemo izvornu definiciju Eulerove karakteristike za poliedre.

**Definicija.** Neka je  $P$  poliedar sa  $V$  vrhova,  $S$  stranica i  $F$  lica, onda je Eulerova karakteristika poliedra  $P$  data sa

$$E_P = V - S + L$$

Međutim, Euler je pokazao da je  $E_P = 2$  za sve konveksne poliedre, rezultat koji je sada poznat kao *Eulerova formula za poliedre*. Ovaj rezultat je bio već bio implicitan u Dekartovim formulama:

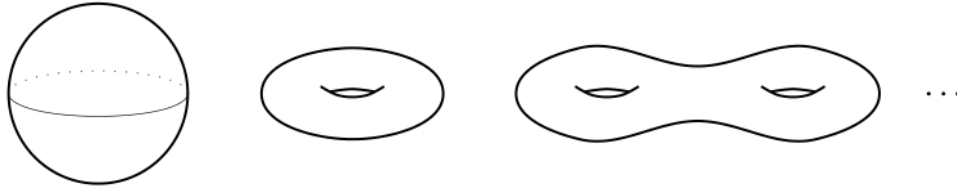
**Propozicija.** Neka je  $B$  broj uglova konveksnog poliedra  $P$ , tada

$$B = 2L + 2V - 4, B = 2S.$$

Relacija  $B = 2S$  slijedi iz toga da svaka strana poliedra gradi dva ugla.

Primjetimo da se sve veličine  $B, L, V, S$  koriste u kombinatornom smislu, naime označavaju broj uglova, lica, vrhova i stranica, redom, te kao takve nisu geometrijske veličine. S obzirom da se ne bavimo geometrijskim osobinama uglova, stranica itd. ugao u Dekartovom kontekstu je topološki koncept, baš kao što je i u Eulerovoj formuli koncept strane topološki koncept.

Iz ovih razloga se Dekartov i Eulerov rezultat svrstavaju u rezultate topologije, iako tada topologija kao matematička disciplina nije postojala. Pitanje da li je Dekart ili Euler "izumitelj" topologije je otvoreno i predmet je rasprave, za pregled ove teme vidjeti Federico (1982). J. Stillwell daje argument da nijedan od njih nije razumio ove formule u potpuno topološkom smislu, tj. u njihovoj punoj topološkoj generalnosti, i to jer su u dokazima koristili mjeru ugla, i nisu shvatili da su vrhovi, strane i lica značajni pojmovi na bilo kojoj površi: strane ne moraju biti ravne (nezakrivljene), i lica ne moraju biti ravna (nezakrivljena). Ostali rani dokazi se također oslanjaju na mjeru ugla i ostale strogo geometrijske kvantitete. Npr. dokaz Legendrea (1794) preptostavlja da poliedar može biti projiciran na sferu, i onda koristi određene relacije između uglova i površi sferičnih poligona. Poincaré je vjerovatno prvi za kojeg se zasigurno može tvrditi da je razumio  $V - S + L$  čisto topološki (1895). On je generalizirao Eulerovu karakteristiku za  $n$ -dimenzionalne figure. Ali u slučaju poliedara, njegova ključna observacija je bila sljedeće: vrh dijeli stranu u dvije strane, i strana dijeli lice na dva lica; slijedi da bilo koja pod-podjela stranica ili lica poliedra ostavlja  $V - S + L$  nepromijenjenim: ako je novi vrh dodan na stranu,  $V$  i  $S$  oboje rastu za 1; ako je nova stranica dodana na lice, onda  $S$  i  $L$  rastu za 1. Slično bi vrijedilo ako bi posmatrali uklanjanja vrhova i stranica itd. [Sti10, str. 469–470].



Slika 1: Zatvorene orijentabilne površi u normalnoj formi [Sti10, str. 472]

### 1.3 Klasifikacija površi

Između 1850. i 1880. nekolicina različitih linija istraživanja je kreirala potrebu za topološkom klasifikacijom površi:

- Jedna linija je bila "nizvodno" Eulera, i to je klasifikacija poliedara
- Druga linija se razvijala preko Riemanna (1851, 1857), i to je reprezentacija algebarskih krivih Riemannovim površima
- Vežan za drugu liniju je bio i problem klasifikacije simetrija grupa teselacija, koji su razmatrali Poincaré (1882) i Felix Klein (1882) (o ovome više poslije)
- Konačno, tu je bio i problem klasifikacije glatkih zatvorenih površi od strane Möbiusa (1863)

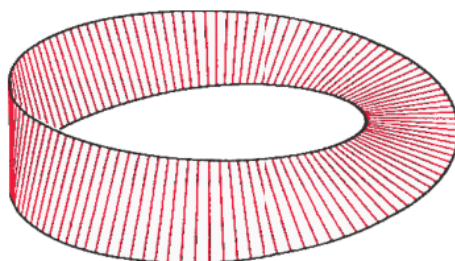
Ovi različiti napori su počeli konvergirati kada je postalo jasno da u svakom slučaju površ može biti podijeljena na lica pomoću stranica (ne nužno stranica koje su duži), tako da se onda moglo govoriti o generaliziranom poliedru i oni su ono što se tradicionalno nazivalo zatvorenom površi, danas opisano u topologiji kao "kompakti bez ruba".

Ispostavilo se da svi poliedri imaju invarijantnu Eulerovu karakteristiku, ne samo objekti homeomorfni sferi, i ne samo oni sa "ravnim" stranicama i "ravnim" licima. Matematičari su brzo shvatili, među njima Riemann (1851) i Jordan (1866), da je bilo koja zatvorena površ određena svojom Eulerovom karakteristikom, do na homeomorfizam. Također su shvatili da se različite Eulerove karakteristike ostvaruju na površima koje su nazivali normalnim formama (Slika 1), koje je otkrio Möbius (1863). Na primjer, sve površi homeomorfne sferi imaju istu Eulerovu karakteristiku, i slično vrijedi za sve površi koje su homeomorfne torusu (imaju

karakteristiku 0), ili torusu sa više rupa (imaju karakteristiku  $2 - 2g$ , pri čemu  $g$  broj rupa<sup>3</sup>).

Slutili su da se ove forme topološki razlikuju zbog broja rupa, te se ubrzo nametnuo ambiciozan cilj da se pokaže da je bilo koja zatvorena površ homeomorfna nekoj od zatvorenih orijentabilnih površi. Ali pretpostavke s kojima su Riemann i Möbius radili su bile isuviše specifične za čisto topološki dokaz. Riemann je pretpostavljao da je površ Riemannova površ, dok je Möbius pretpostavljao da je površ ugrađena u  $\mathbb{R}^3$ . Osim toga, u dokazima su imali skrivenu pretpostavku o orijentabilnosti površi. Sve te pretpostavke su uticale na generalnost rezultata, te se potraga za dokazom neovisnim od tih pretpostavki nastavila. Godine 1907., krećući od aksiomatizacije generaliziranog poliedra, Dehn i Heegaard su dali rigorozan dokaz. Ispostaviće se da su slutnje bile na dobrom tragu, usitinu, sve zatvorene orijentabilne površi se mogu homeomorfno preslikati u neku od površi sa slike.

Međutim, pokazaće se da pored orijentabilnih površi postoje i neorijentabilne površi poput Möbiusove trake (Slika 2), koje su neovisno otkrili Möbius i Listing 1858.



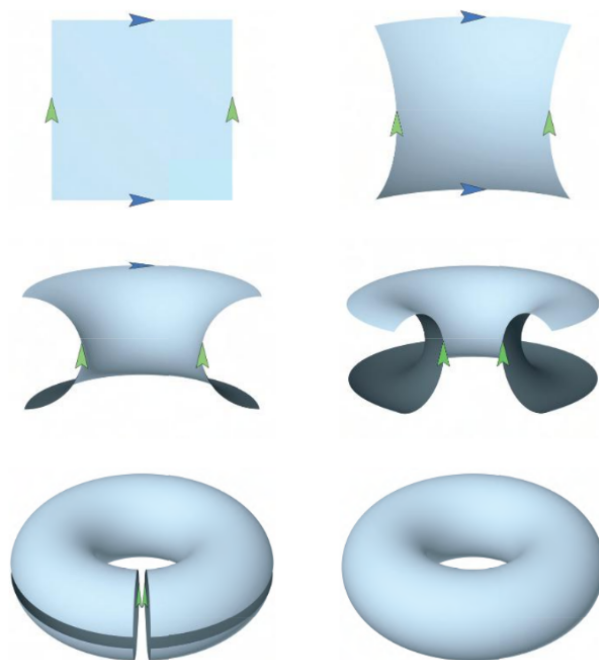
Slika 2: Möbiusova traka, primjer neorijentabilne površi [Wee20, str. 230]

Neorijentabilna površ može biti definisana kao površ koja sadrži Möbiusovu traku. Neorijentabilne površi ne mogu biti Riemannove površi, niti mogu ležati u  $\mathbb{R}^3$  bez samo-presjeka; kako god, među njima su neke bitne površi, kao što je projektivna ravan. Neorijentabilne površi su također do na homeomorfizam određene svojom Eulerovom karakteristikom.

Jedan od velikih doprinosa Felixa Kleina topologiji je bio to što je 1882. Möbiusovim normalnim formama uspio pridružiti poliedarnu strukturu. Naime ovo su minimalne podjele date površi, sa samo jednim licem, i osim sfere, sa samo

<sup>3</sup>Broj rupa zovemo i genus, stoga slovo  $g$ .

jednim vrhom. Kada se izvrši Kleinova podjela površi, tj. kada je površ prerezana duž ivica i stranica podjele, dobije se tzv. fundamentalni poligon (Slike 3....), iz kojeg se površ može rekonstruisati, i to na način da identificiramo ("zalijepimo") odgovarajuće ivice dobijenog poligona.



Slika 3: Dobijanje fundamentalnog poligona iz torusa (i obrnuto) [Wee20, str. 27]

Često je lakše raditi sa poligonom nego sa površi ili njenom poliedarnom strukturom. Još od Henryja Poincaréa (1859-1942), koji je prvi rigorozno dokazao da je svaka povezana kompaktna površ topološki ekvivalentna ili sferi, ili povezanoj sumi torusa (ako orijentabilna) ili povezanoj sumi realnih projektivnih ravni (ako neorijentabilna), većina dokaza u teoremima koji klasificiraju površi su koristili poligone umjesto poliedara, i to opisanom tehniku "rezanja i ljepljenja". Fundamentalni poligon daje vrlo zgodnu kalkulaciju Eulerove karakteristike  $\chi$  i pokazuje da je povezana sa brojem rupa  $g$ , i ta veza je izražena formulom  $\chi = 2 - 2g$ . Broj rupa određuje površ direktnije nego Eulerova karakteristika  $\chi$ , ali  $\chi$  nosi više informacija o geometrijskim osobinama površi, što je korisnije u odgovarajućem kontekstu [Sti10, str. 471–473].

## 1.4 Površi opremljene geometrijom

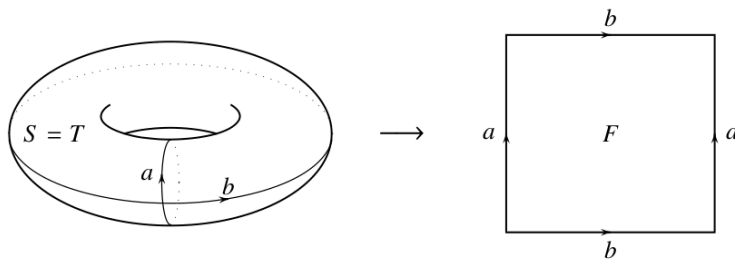
Ovdje ćemo se nadovezati na prethodnu sekciju, u kojoj smo pričali o fundamentalnim poligonima, i vidjećemo kako pomoću fundamentalnih poligona možemo "pokriti" Euklidsku i hiperboličku ravan, što će eventualno omoučiti da se površi opreme sa odgovarajućom geometrijom.

**Definicija.** Preslikavanje  $\varphi : \tilde{S} \rightarrow S$ , površi  $\tilde{S}$  na  $S$ , nazivamo *pokrivačem* ako je  $\varphi$  lokalni homeomorfizam (tj. ako se  $\varphi$  ponaša kao homeomorfizam kada  $\varphi$  suzimo na dovoljno mali domen).

Prvi interesantni primjeri pokrivača su oni orijentabilnih površi genusa  $\geq 1$  (tj.  $\chi \leq 0$ ), i ove sve površi mogu biti pokrivena ravnima. Suština ove ideje je od Hermanna Schwarz, i postala je poznata preko Kleinovog pisma Poincaréu (1882).

### Slučaj genus = 1

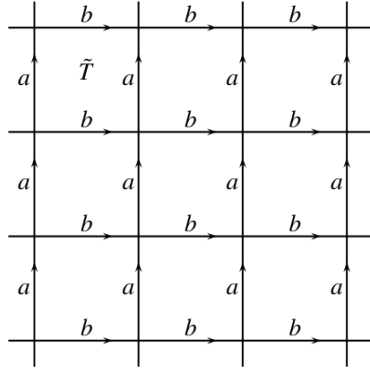
Prije nego objasnimo konstrukciju univerzalnog pokrivača, pogledajmo na koji način fundamentalni poligon torusa dodiruje samog sebe na torusu. Na slici 4. je torus i njmu pridruženi kvadrat kao fundamentalni poligon  $F$  na desnoj strani.



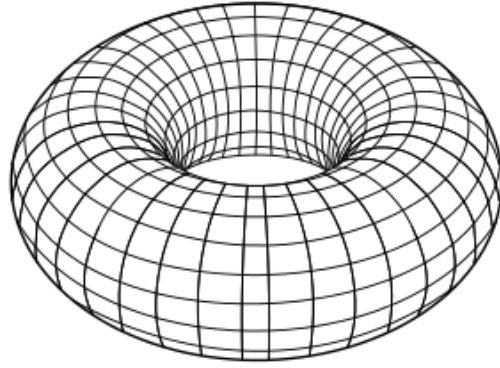
Slika 4: Fundamentalni poligon torusa [Sti10, str. 481]

Na torusu možemo uočiti (vidjeti i Sliku 3) da se stranice kvadrata  $a, b$  identificiraju same sa sobom (u istom pravcu, što nam govore strelice na stranicama).

Sada, konstrukcija univerzalnog pokrivača površi  $S$  se vrši na način da se beskonačno mnogo kopija fundamentalnog poligona  $F$  površi  $S$  složi u ravan, tako da se susjedne kopije  $F$ -a dodiruju na isti način na koji  $F$  dodiruje *sebe* na  $S$ , što možemo vidjeti na idućoj ilustraciji (Slika 5, [Sti10, str. 482]). Ako sada posmatramo preslikavanje  $\varphi : \tilde{T} \rightarrow T$ , pri čemu je  $\tilde{T}$  površ koju smo dobili kada



Slika 5: Teselacija pokrivača



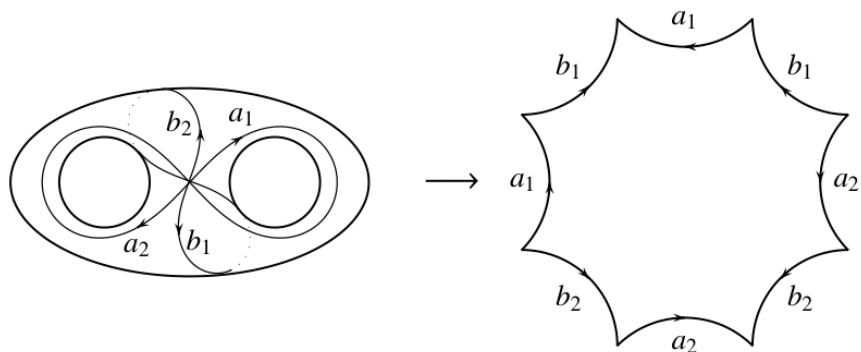
Slika 6: Torus opremljen geometrijom

smo spojili beskonačno mnogo poligona na odgovarajući način (ubrzo ćemo vidjeti da ovu površ možemo posmatrati kao ravan), a  $T$  torus, univerzalni pokrivač  $\varphi$  dobijemo tako što svaku kopiju poligona  $F$  u  $\tilde{T}$  preslikamo na prirodni način u  $T$ .

Teselacija na slici 5. može biti realizirana kvadratima u Euklidskoj ravni, stoga torus možemo opremiti Euklidskom geometrijom (Slika 6 [Wik26]) gdje za udaljenost između dvije tačke na torusu uzimamo udaljenost između njihovih praslika na ravni. Tada su geodezici na torusu ustvari slike pravih linija u  $\mathbb{R}^2$ . Na taj način geometrija torusa je euklidska ali samo lokalno, globalno nije jer postoje zatvoreni geodezici, poput slika segmenata  $a$  i  $b$  sa fundamentalnog poligona. Kao posljedicu imamo da je suma uglova svakog trougla na torusu  $180^\circ$ .

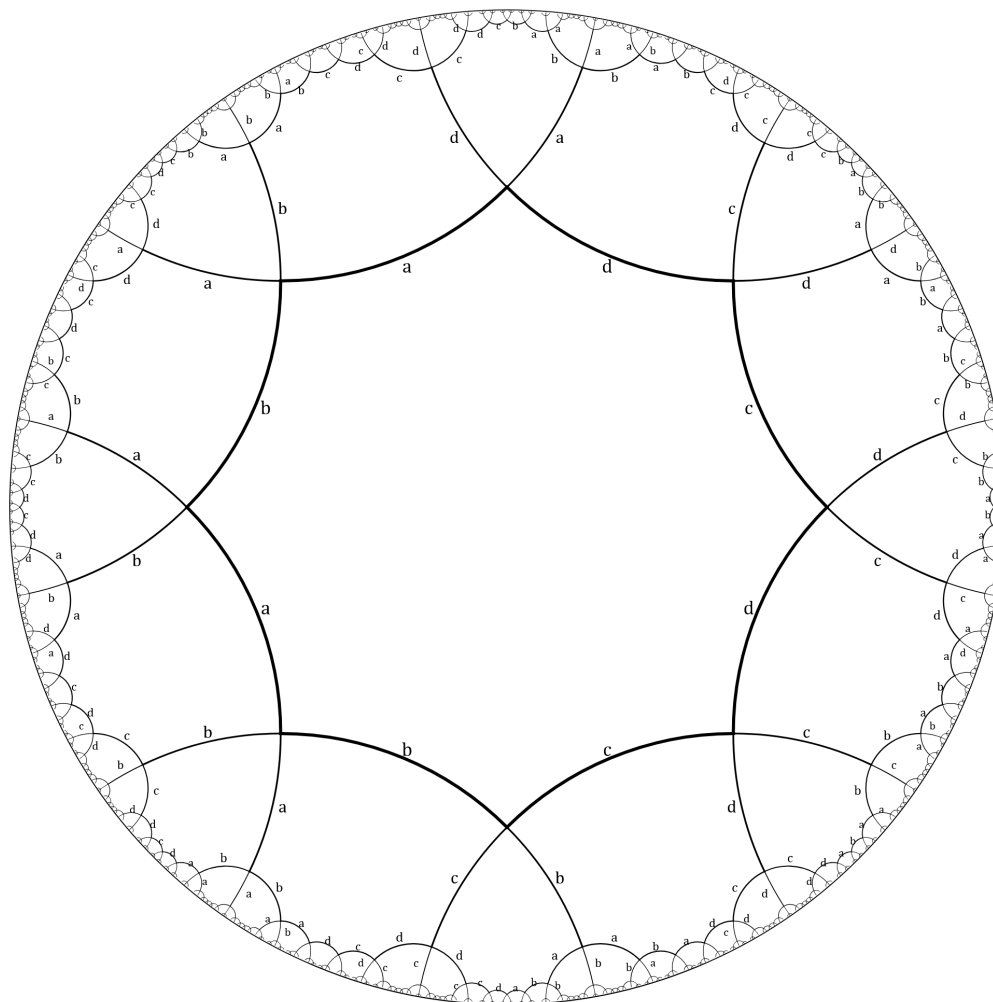
### Slučaj $\text{genus} > 1$

Iznad smo razmotrili univerzalni pokrivač površi genusa 1, tj. sa jednom rupom. Međutim, kada je  $\text{genus} > 1$  (tj.  $\chi < 0$ ), situacija se drastično mijenja, i prirodna geometrija koja se nameće je sada hiperbolička. Naime, prema Gauss-Bonnetovom teoremu, znamo da zakrivljenost površi ovisi od Eulerove karakteristike  $\chi$ , i prema istom teoremu da se u površima konstantne negativne zakrivljenosti zadovoljeni aksiomi hiperboličke geometrije. Iz toga direktno slijedi da fundamentalni poligoni površi sa dvije ili više rupa prirodno imaju hiperboličku geometriju. Dakle pokrivači će sada da žive u hiperboličkoj ravni, a ne u Euklidskoj, kako je to bio slučaj sa jedno-rupim torusom. Ovo najbolje možemo primjetiti na primjeru torusa sa dvije rupe, i njegovom fundamentalnom poligonu.



Slika 7: Fundamentalni poligon površi genusa 2 [Sti10, str. 483]

Univerzalni pokrivač opet konstruišemo na način da se poligoni međusobno dodiruju kako se poligon dodiruje sa sobom na površi (to možemo vidjeti na slici iznad lijevo). Osam kopija ilustriranog oktagona prikazanog iznad desno se moraju sresti u svakom vrhu, baš kao što su se četiri kvadrata sretala u svakom vrhu svakog kvadrata u prethodnom slučaju. Ovakva teselacija je nemoguća oktagonima u Euklidovoj ravni, ali je moguća u hiperboličkoj ravni (Slika 8 [Geo20]).



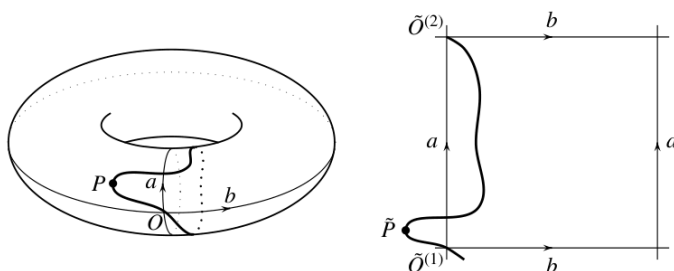
Slika 8: Teselacija hiperboličke ravni fundamentalnim poligonom površi genusa 2

Općenito, teselacije fundamentalnim poligonima površi genusa  $\geq 2$  se mogu slično realizirati u hiperboličkoj ravni, i bile su razmatrane od strane Poincaréa (1882) i Kleina (1882). Kao i slučaju površi genusa 1, i površi genusa  $\geq 2$  možemo opremiti metrikom i svom ostalom lokalnom geometrijom, samo će to sad biti hiperbolička geometrija [Sti10, str. 479–483].

## 1.5 Fundamentalna grupa

### Homotopija i klase homotopije

Vratimo se sada na univerzalni pokrivač torusa (Slika 5). Kako put na torusu korespondira putu u ravni (tj. poligonalnoj teselaciji)?



Slika 9: Put na torusu i poligonalnoj teselaciji (ravni) [Sti10, str. 484]

Kad se tačka  $P$  pomjera po putu na torusu, prasluka od  $P$ ,  $\tilde{P}$  se analogno pomjera u ravni, sa razlikom da kad  $P$  pređe sa jednog fundamentalnog poligona u drugi, tačka  $\tilde{P}$  prelazi sa jednog odgovarajućeg poligona u drugi. Dakle, i kad se  $P$  vrati u početnu tačku puta na torusu,  $\tilde{P}$  se neće nužno vratiti u početnu tačku u ravni. Možemo reći da razlika između krajnje i početne pozicije tačke  $\tilde{P}$  na neki način mjeri koliko se puta tačka  $P$  omota oko torusa. Kada se  $P$  omota jednom oko torusa, otprilike u pravcu  $\vec{a}$ ,  $\tilde{P}$  se kreće od jednog do drugog kraja segmenta  $\vec{a}$  u ravni. Ako se  $P$  omota dva puta,  $\tilde{P}$  se kreće od jednog kraja segmenta  $\vec{a}$  jednog poligona do kraja segmenta  $\vec{a}$  na drugom (idućem) poligonu.

**Definicija.** Za puteve  $p$  i  $p'$ , sa početnom tačkom na površi  $S$ , kažemo da su *homotopni*, ako  $p$  može biti neprekidno deformisan u  $p'$  dok je  $O$  fiksirano.

Ispostavi se da je homotopnost relacija ekvivalencije, tako da svi međusobno homotopni putevi pripadaju istoj tzv. klasi homotopije.

Ako put  $p$ , na kojem je tačka  $P$ , deformišemo u  $p'$ , onda će se put  $\tilde{p}$ , na kojem je tačka  $\tilde{P}$ , deformisati u put  $\tilde{p}'$ , sa istim početnim i krajnjim tačkama  $\tilde{O}^{(1)}$  i  $\tilde{O}^{(2)}$  kao i  $\tilde{p}$ . Može se pokazati da svaka klasa homotopije odgovara pomjeranju ravni, koje pomjera početnu tačku puta ( $\tilde{O}^{(1)}$  u primjeru iznad) u krajnju tačku puta (u  $\tilde{O}^{(2)}$  u primjeru iznad). Dakle, klase homotopije odgovaraju diskretnim pomjeranjima ravni (tj. univerzalnog pokrivača), i to gore, dolje, lijevo, desno, kao što ćemo ubrzo vidjeti [Sti10, str. 485].

## Fundamentalna grupa $(\mathcal{H}, c)$

U poluformalnom<sup>4</sup> smislu, fundamentalnu grupu možemo definisati kao  $(\mathcal{H}, c)$ , pri čemu je  $\mathcal{H}$  skup klasa homotopije površi  $S$ , a  $c$  operacija konkatencije (nadovezivanja) puteva. Pokaže se da je  $\mathcal{H}$  opremljena operacijom  $c$  uistinu grupa.

Neka je  $S$  torus kao u prošlom primjeru, da li je onda fundamentalna grupa torusa izomorfna nekoj grupi? Pokaže se da jeste, i to grupi  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , jer ova grupa tačno odgovara diskretnim pomjeranjima ravni popločane fundamentalnim kvadratima. Naime, cjelobrojni uređeni par  $(1, 0)$  možemo interpretirati kao da pomjerimo čitavu ravan za jedno polje (kvadrat) gore, ili  $(2, 1)$ , 2 gore, 1 desno itd. A jer su klase homotopije određene početnim i krajnjim tačkama u ravni to postoji prirodna korespondencija sa uređenim cjelobrojnim parovima [Šar24].

Fundamentalnu grupu je prvi definisao Poincaré 1895. godine, ali njegova definicija je bila generalnija, jer je uključivala figure čiji univerzalni pokrivači nisu bili tako očiti. Zbog toga ju nije vidio kao grupu koja pomjera univerzalni pokrivač, kao što mi ilustriramo ranije. Ali Poincaré se jeste već bavio kretnjama teselacija (1882), i on 1902. uspijeva pomiriti taj raniji rad sa fundamentalnom grupom, kada i nadolazi do interpretaciju koju iznad navodimo.

Fundamentalna grupa će eventualno dovesti do zaključka da je jedan od osnovnih problema topologije ne rješiv: za dvije date, "dovoljno dobro opisane" figure  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ , nemoguće je uvijek reći da li su homeomorfne [Sti10, str. 484–486].

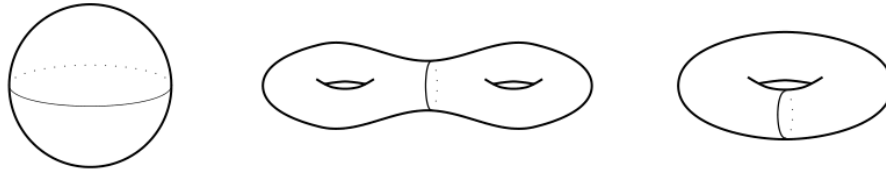
## 1.6 Poincaréova hipoteza

### Krive koje omeđuju i homologija

Da bi razumjeli Poincaréovu hipotezu, prvo moramo razumjeti šta su krive koje omeđuju površ na kojoj se nalaze. Razmotrimo prvo slučaj sfere. Primjetimo da svaka jednostavna zatvorena kriva na sferi omeđuje površ koja je topološki disk, čak i kada je ta kriva ekvator, jer u tom slučaju gornja i donja hemisfera se mogu "izravnati" do diska. Šta ako imamo petlju kao na torusu u desno slici ispod? Ako bi presjekli torus po petlji, dobili bi šupalj cilindar, a u toj šupljini nema tačaka površi, stoga prikazana petlja ne omeđuje nijedan dio površi, a pogotovo ne disk [Sti10].

---

<sup>4</sup>Fundamentalna grupa ima znatno drugačiju standardnu notaciju, ali mi biramo jednostavnu notaciju, koja će čitaocu koji se susreo sa Algebrom biti poznata.



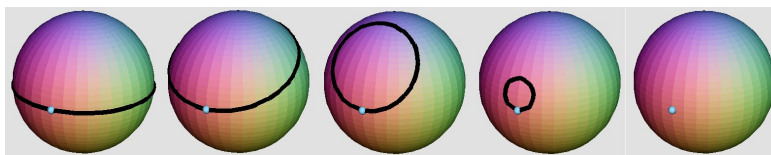
Slika 10: Krive koje omeđuju i ne omeđuju površ [Sti10, str. 486]

Na slici u sredini imamo konturu koja omeđuje dvije površi, ali te površi nisu topološki ekvivalentne diskovima. Primjetimo da na sve tri površi možemo uvijek naći konture koje ograničavaju disk (izaberemo dovoljno malu kružnicu), ali kod oba torusa postoje krive koje ne omeđuju. Uistinu, sfera  $\mathbb{S}^2$  je jedina zatvorena površ na kojoj je svaka jednostavna zatvorena kontura omeđujuća. Iz toga razloga sfera u ovom kontekstu nije interesantna, dok torusi jesu, jer za njih ima smisla pitati koliko ima krivih koje omeđuju disk.

Ovaj koncept ima i svoj matematički formalizam, koji se naziva homologija, i koje je izumio također Poincaré, u svom radu *Analysis Situs* 1895. i u njegovih pet nadopuna. Ukratko, homologija je relacija ekvivalencije između petlji na površi, slično kao i homotopija, s tim što homotopija inducira jaču vrstu ekvivalencije [Šar24].

### Poincaréova hipoteza

Godine 1900. Poincaré je hipotezirao da je  $\mathbb{S}^3$ , sfera u  $\mathbb{R}^4$ , jedina zatvorena 3-mnogostrukost na kojoj je svaka kriva omeđujuća. Četiri godine poslije, sam Poincaré je otkrio kontraprimjer, tzv. *sferu homologije*, koja nosi taj naziv iz razloga što taj objekat ima istu homologiju kao i  $\mathbb{S}^3$ , uprkos njihovoj nehomeomorfnosti. U Poincaréovoj "sferi homologije" svaka jednostavna zatvorena kriva ograničava površ, ali ne uvijek disk. Prema, tome, Poincaré je prepravio svoju u hipotezu u: Ako svaka jednostavna zatvorena kriva na zatvorenoj povezanoj 3-mnogostrukosti  $M$  ograničava disk, onda je  $M$  homeomorfno sa  $\mathbb{S}^3$ . Ekvivalent ove tvrdnje je da je svaka zatvorena kriva na  $M$  kontraktibilna, drugim riječima, da se može suziti u tačku (Slika 11).



Slika 11: Kontraktibilnost krive na sferi [Wik26]

Ova verzija će postati poznata kao Poincaréova hipoteza, jedan od najvećih matematičkih problema 20. stoljeća. Egzistencija sfere homologije pokazuje da su tri dimenzije dosta komplikovanije od dvije, ali nije odmah bilo jasno koliko komplikovanije. Dehn (1910), Alexander(1919) i Whitehead(1935) će svi naći brojne primjere anomalija koji su bili nezamislivi u slučaju 2-mnogostrukosti.

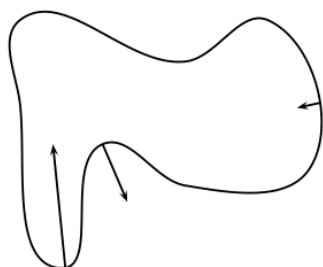
U pedesetim i šezdesetim godinama prošlog stoljeća su stigle prve dobre vijesti. Dokaza za hipotezu još nije bilo, ali progres se dešavao u višim dimenzijama. Naime Smale (1961), je pokazao analogon hipoteze za  $S^n$  za  $n \geq 5$ . Ispostaviće se da je lakše raditi, bar u ovom kontekstu, u pet dimenzija i više, nego u tri, iako je tri teže od dva (topolozi će reći da u više dimenzija "ima više prostora"). Slučaj za dimenziju 4 će dokazati Freedman (1982), koji je istovremeno dokazao nekolicinu otvorenih problema za 4-mnogostrukosti. Ipak, njegov pristup je bio neobičan, i njegovi savremenici nisu polagali puno nade da bi se njegov pristup mogao prilagoditi Poincaréovoj hipotezi u tri dimenzije.

William Thurston je u kasnim sedamdesetim razvio svoju *hipotezu o geometrizaciji*, čija je Poincaréova hipoteza specijalni slučaj. Thurston je uspio dokazati mnoge specijalne slučajeve svoje hipoteze, ali progres na ovom polju će da uspori početkom osamdesetih. To nije obeshrabrilo topologe, jer oni su svakako htjeli čisto topološki dokaz Poincaréove hipoteze, koji se ne oslanja na geometriju. Ali, geometrija će ipak da stigne u pomoć, i to *diferencijalna geometrija* [Sti10, str. 486–489].

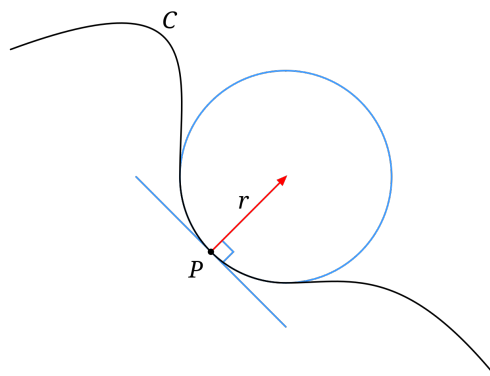
## Dokaz

U nastavku ćemo prezentovati vrlo pojednostavljenu ideju dokaza, kojeg je 2003. objavio Grigori Perelman. U dokazu je ključna ideja bila da se "teče ka homogenosti", i tu ideju je inicirao još Hamilton (1982), gdje u kontekstu 3-mnogostrukosti nosi naziv *Ricci flow*. Poteškoće s kojima se Perelman susreo su bile brojne i ilustriraćemo ih na primjeru zatvorenih mnogostrukosti dimenzija 1 i 2, tj. krivih i površi. Analogon Ricci flowa u nižim dimenzijama ćemo nazivati *pseudo Ricci flow*.

Zatvorena jedno-dimenzionalna mnogostrukost može biti realizirana kao zatvorena glatka kriva u ravni, kao na slici 12 (izvor slike:[Sti10, str. 489]).



Slika 12: Pseudo Ricci flow krive

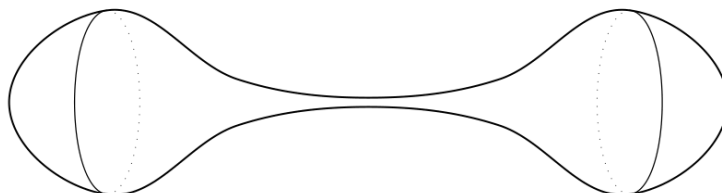


Slika 13: Kružnica zakrivljenosti

Prikazani vektori su okomiti na tangente koje prolaze kroz tačke u kojima vektori dodiruju krivu, intenzitet im je proporcionalan zakrivljenosti, tj. obrnuto proporcionalan kružnicama zakrivljenosti, pod kojima podrazumijevamo kružnice tangentne na krivu u datoj tački, koje najbolje aproksimiraju krivu; također vektori prolaze kroz centar kružnica zakrivljenosti. Slika 13 ([Wik26]) prikazuje kružnicu zakrivljenosti krive. Ideja je sada da pustimo da svaka tačka krive na slici 12 teče u pravcu vektora kojem je početak, i to brzinom intenziteta vektora. Hoće li ka nekoj krivoj konvergirati ova kriva u graničnom procesu? Ispostavi se i može se dokazati da hoće, i to ka kružnici. Ali zato moramo nametnuti još pretpostavku da u procesu površina unutrašnjosti bude očuvana, u suprotnom kriva kolabira u tačku. Dakle, svaka zatvorena 1-mnogostrukost ima geometrijsku realizaciju u kružnici [Num14; Sti10].

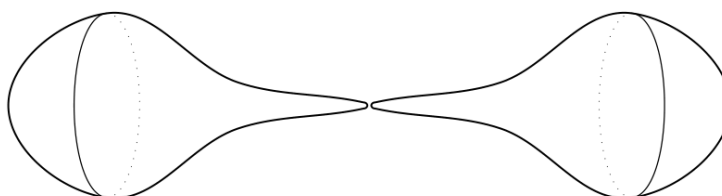
Ako razmotrimo sličan proces u  $\mathbb{R}^3$ , nastaje nekolicina komplikacija. Prije svega, umjesto vektora u tangentama, imaćemo vektore normale na tangentnim površima u tačkama mnogostrukosti. Idući problem je da ne znamo koju vrstu zakrivljenosti da odaberemo, jer Gaussova zakrivljenost sada nije jedina opcija. Očekujemo da koju god zakrivljenost da izaberemo, da se svaka površ (sada u kontekstu  $\mathbb{R}^3$ , tj. 2-mnogostrukosti) u analognom procesu pseudo Ricci toka opisanom iznad za krive, transformiše u sferu. Međutim, čak i kada napravimo dobar odabir zakrivljenosti, neke patološke površi koje jesu homeomorfne sferi, poput one prikazane na slici 14, pseudo Ricci flow neće navesti da "teku" sferi (koja ima konstantu zakrivljenost) kao što bismo htjeli. To je iz razloga što

velika<sup>5</sup> zakrivljenost na sredini ove površi čini da se taj dio teži stanjuje brže od ostalih dijelova površi, što rezultira u površi čiji "vrat" postaje još tanji, tako da ne dobijemo sferu  $\mathbb{S}^2$  u geometrijskom smislu, jer ta površ očito neće imati konstantnu zakrivljenost koju sfera ima.



Slika 14: Površ koja ne teži ka sferi [Sti10, str. 490]

Izlaz iz ove situacije je da se izvrši tzv. operacija, tako da se napravi rez na tankom dijelu površi i da se pri tom nastale rupe neprekidno zatvore (Slika 15). Rezultirajuće površi su dvije površi koje teže standardnoj sferi pod procesom pseudo Ricci flow-a. Sa analizom zakrivljenosti, i uz pomoc operacija, može se dokazati Poincaréova hipoteza za 2-mnogostrukosti: Svaka zatvorena jednostavno zatvorena oblast je homeomorfna  $\mathbb{S}^2$ . Naravno, ovo se može pokazati i neposrednije, iz topoloških klasifikacija površi. Poenta je da ovaj metod funkcioniše i za 3-mnogostrukosti, gdje teoremi o klasifikaciji nisu dostupni.



Slika 15: Rezultat operacije [Sti10, str. 490]

Primjer površi na slici 14 je svakako samo analogon vrsta 3-mnogostrukosti koje su Hamiltonu predstavljale prepreku u njegovim pokušajima da dokaže

---

<sup>5</sup>Primjetimo da ovaj dio sada ima veliku zakrivljenost, što ne odgovara intuiciji koju smo mogli naslutiti u slučaju krivih

hipotezu. Sve te prepreke je prevazišao Perelman 2003., kada je dokaz objavio na poznatoj stranici arxiv.org, i to u tri dijela. Za ovaj uspjeh, Perelman je 2006. dobio Fieldsovu medalju, koju je odbio prihvatiti. Časopis *New Yorker* je objavio priču koja pokriva sve događaje oko dokaza Poincaréove hipoteze, i zainteresirani čitaoc tamo može pronaći više informacija [Sti10, str. 489–491].

## 1.7 Prelaz

S ovime završava naš prelged *geometrijske topologije*, i u sljedećem dijelu ćemo se baviti *generalnom*<sup>6</sup> *topologijom*, a topologiji i geometriji, i algebarskoj geometriji ćemo se vratiti u trećem dijelu ove ekspozicije, kada ćemo ispričati priču o sjedinjenju ove dvije struje topologije.

---

<sup>6</sup>point-set

## 2 Generalna topologija

### 2.1 Georg Cantor i počeci point-set topologije

Između 1872. i 1890. istraživanje svojstava nekih beskonačnih podskupova realnog pravca Georga Cantora (1845-1918) je navelo da definiše iduće pojmove: tačka nagomilavanja, zatvoreni skup, izvodni skup (skup svih tačaka nagomilavanja), gust skup itd.

Georg Cantor je studirao u Berlinu pod Kummerom, Kroneckerom i Weierstrassom. Godine 1869. postaje docent na Univerzitetu u Halle-u. Njegov kolega sa univerziteta, Edward Heine, mu je predložio da prouči jedinstvenost reprezentacije funkcije preko trigonometrijskih redova. 1870. objavljuje dokaz teorema koji kaže da ako trigonometrijski red

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

konvergira ka  $f(x)$  za sve  $x \in (0, 2\pi)$ , onda  $f(x)$  ne može biti predstavljena drugim trigonometrijskim redom koji konvergira ka  $f(x)$  za sve  $x \in (0, 2\pi)$ . Godinu dana poslije, Cantor je ojačao ovaj dokaz, i dodatno pokazao da je reprezentacija funkcije  $f(x)$  jedinstvena čak i kada red ne konvergira ka  $f(x)$  za konačan skup nekih posebnih tačaka [KM99, str. 203].

Upravo je ovaj problem odveo Cantora ka teoriji transfinitnih skupova i njegovim rezultatima u topologiji. Shvatio je da se pretpostavke teorema mogu dodatno oslabiti, naime, "posebne" tačke su ustvari tačke nagomilavanja.

**Definicija.** Realan broj  $x$  je tačka gomilanja skupa  $X \subset \mathbb{R}$ , ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $y \in X$ , takvo da  $0 < |x - y| < \varepsilon$ .

Čak i kad je skup tačaka gomilanja beskonačan, ako on sam ima konačno mnogo tačaka gomilanja, teorem i dalje vrijedi. Daljnji rad na ovom pitanju će odvesti Cantora do njegove definicije realnih brojeva, koja je bila neovisna od onih od Weierstrassa, Dedekinda i ostalih. Koristeći tu definiciju, i čitav prateći aparat koji je razvio uz nju, Cantor je dokazao teorem o jedinstvenosti za trigonometrijske redove za "posebne" skupove *tipa*  $v$ , za  $v \in \mathbb{N}$ .

Cantor je opisao zatvoren skup kao skup koji sadrži svoje tačke gomilanja, pri čemu je skup tačaka gomilanja datog skupa nazivao izvodnim skupom. Kroz ove pojmove, Cantor je "inaugurirao" polje koje danas nazivamo point-set ili generalna topologija, dio topologije najbliži teoriji skupova i najrelevantniji za analizu [Bur10, str. 729], [KM99, str. 204].

Georg Cantor se također izdvaja kao matematičar koji je imao najviše uticaja na popularizaciju point-set doktrine, koja je dala potpuno novu perspektivu topološkom načinu razmišljanja. Najutjecajnija istraživanja u ovom polju je objavio u nizu od šest članaka, nazvanih "O beskonačnim, linearnim tačkastim mnogostrukostima"<sup>7</sup> (1879-1883). Ernst Zermelo će poslije reći da ovi brilijantni članci predstavljaju "kvintesenciju Cantorovog životnog djela".

I u ovim radovima, fundamentalni koncept je bio onaj tačke nagomilavanja. Gradeći na Bolzano-Weierstrassovom teoremu, Cantor je izveo sve danas dobro poznate koncepte: izvodni skup, svuda gust skup, izoliran skup tačaka, nigdje gust skup i Cantorov "srednja-trećina" "diskontinuum". Upravo ovi (i drugi) pojmovi su faktički otvorili nova polja izučavanja. Analisti su bili prvi koji su prepoznali korisnost Cantorovih ideja, što će značajno ubrzati napredak teorije realnih i kompleksnih funkcija u nadolazećim godinama, nakon objave Cantorovih članaka.

Primjene Cantorovog alata u geometriji će doći nešto kasnije, i pomenućemo ih kada budemo pričali kako su upravo taj alat Peano i Jordan iskoristili u tom domenu, i kako je to zauzvrat uticalo na razvoj point-set topologije [Cri99, str. 9].

## 2.2 Frechet i metrički prostori

Point-set topolozi u početku su se bavili samo sa Euklidovim prostorima, od linije preko ravni pa više dimenzionalnih Euklidovih prostora, iako su svi korišteni topološki koncepti imali i generalniju validnost. Tu generalniju validnost među prvima je prepoznao Frechet, koji se smatra prvim koji je razradio teoriju topologije za apstraktne prostore, koji nisu nužno imali veze sa do tada ekskluzivno izučavanim Euklidskim prostorima. U 1904. i 1905. godini, Frechet objavljuje niz kratkih članaka u kojima je postavio temelje za svoju tezu, koju će braniti 1905., i koja je jedan od najvažnijih doprinosa matematici. U tezi, i pomenutom nizu članaka, Frechet je apstrahirao teoriju analize za apstraktne prostore, preciznije, istraživao je prostore u kojima se mogu definisati tačke gomilanja skupova i nizova. Da bi se odredilo da li je  $x$  tačka gomilanja skupa  $X$ , bitno je moći govoriti o "blizini" tačke  $x$  skupu  $X$ . Pitanje "blizine" navodi Frecheta da razmatra ono što danas zovemo metričkim prostorima (Hausdorff je tvorac imena "metrički prostori" u njegovoj knjizi iz 1914.). To su prostori koji su opremljeni sa strukturom koja omogućava da se priča o distanci između dvije tačke datog prostora (skupa). Da bi novopečeni pojam metričkih prostora bio koristan za tadašnju aktualnu matematiku, Frechet je inspirisan udaljenošću iz Euklidskih prostora, konkretno

---

<sup>7</sup>Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten

realnog pravca, definisao generalni pojam udaljenosti izmedju dvije tačke  $x, y$  u oznaci  $d(x, y)$ , koji je morao da zadovolji 4 osobine [Bur10, str. 730]:

**Definicija. Metrika.** Neka je  $X$  metrički prostor, na kom je definisana funkcija  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . Za  $d$  kažemo da je metrika ako vrijede sljedeće tri osobine:

1.  $d(x, y) = 0$  akko  $x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Dakle, pod metričkim prostornom ne mislimo ništa više nego da je skup  $X$  opremljen funkcijom distance, koju nazivamo metrika.

Najočitiji primjer metričkog prostora je skup  $\mathbb{R}^n$ , u kom je metrika dobro poznati korijen sume razlika kvadrata. Formalno, neka su  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , onda metriku  $d$  u  $\mathbb{R}^n$  definišemo sa

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

Interesantniji primjer je skup svih realnih neprekidnih funkcija na intervalu  $[0, 1]$ . Za takve dvije funkcije  $f, g$ , metriku  $d(f, g)$  definišemo sa

$$d(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Kad imamo ideju distance između elemenata nekog skupa, onda možemo i na drugačiji način formalizirati ideju tačke gomilanja  $x$  skupa  $A$  koji je podskup prostora  $X$  opremljenog metrikom  $d$ .

**Definicija. Tačka gomilanja, Frechetova verzija.**  $x$  je tačka gomilanja skupa  $A$ , ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji tačka  $y \in A$ , takva da  $y \neq x$  i  $d(x, y) < \varepsilon$ .

Frechet je iz realne analize prenio i koncepte konvergencije niza, i formulisao ga tako da samo ovisi od metrike.

**Definicija. Konvergentni niz.** Niz  $x_1, x_2, x_3, \dots$  tačaka iz  $X$  konvergira ka  $x$ , ako niz realnih brojeva  $d(x_1, x), d(x_2, x), d(x_3, x), \dots$  konvergira ka 0.

Ideja neprekidne funkcije se također može izraziti preko metrike.

**Definicija. Neprekidna funkcija.** Neka su  $X, X'$  metrički prostori, sa svojim metrikama  $d, d'$  redom, onda je funkcija  $f : X \rightarrow X'$  neprekidna u tački  $x$ , ako  $d'(f(x_n), f(x)) \rightarrow 0$  kad  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ .

I ovo je standardna adaptacija sekvencijalne neprekidnosti koja nam je poznata iz realne analize [Bur10, str. 731].

## 2.3 Felix Hausdorff i okoline

Topologija se prvi put pojavljuje kao kohezivna matematička disciplina u udžbeniku Felixa Hausdorffa, objavljenog 1914. godine, pod nazivom *Grundzüge der Mengenlehre (Osnove teorije skupova)*. Taj udžbenik će sve do kraja 1920-ih godina biti glavna referenca za učenje topologije i teorije skupova, koji su, kao što smo do sad mogli vidjeti, bili usko povezani. Upravo u ovom udžbeniku se prvi put pojavljuju metrički prostori pod tim imenom.

Zanimljivost je da Hausdorff nije bio topolog, niti je prije svog popularnog udžbenika išta objavljivao na temu topologije [Bur10, str. 731].

Specifičnost Hausdorffovog pristupu topologiji ogleda se u tome što je akcentirao važnost pojma okoline tačke. Godine<sup>8</sup> 1904., kada je Frechet htio da razvije teoriju u kojoj će izvodni skup da bude nužno zatvoren, imao je pisanu korespondenciju sa Jacquesom Hadamardom (1865-1963), u kojoj Hadamard piše [KM99, str. 209]:

*Da li bi bilo dobro početi od ideje okoline, a ne od ideje granične vrijednosti?*

Već 1905. Frechet će poslušati Hadamardov savjet.

Još prije nego će Frechet početi svoj rad na apstraktnim prostorima, David Hilbert 1902. predlaže da je pojam okoline centralan. Ali Hilbert nikad neće nastaviti rad na tom polju, kako god, njegovo mišljenje svjedoči činjenici da je pojam okoline sazrijevaio već neko vrijeme [KM99, str. 211].

Razni pokušaji da se da odgovarajuća definicija apstraktnog prostora kulminira u radu Hausdorfa (1868-1942). Još 1902. Hausdorff je u Leipzigu držao predavanja iz teorije skupova, i smatra se da je to bio prvi kurs teorije skupova bilo gdje u Njemačkoj. U 1912. godini Hausdorff je bio profesor na univerzitetu u Bonnu i tamo je nastavio da drži predmet teorije skupova. U poglavlju 6 njegovih bilješki za taj predmet, koje se čuvaju u arhivu Univerziteta u Bonnu, radi sa *skupovima tačaka*<sup>9</sup> ("Punktmengen") koje naziva i *okolinama* ("Umgebungen"). U nastavku prenosimo originalni dio Hausdorffovog manuskripta gdje karakterizira ovaj i druge pojmove [KM99, str. 213].

---

<sup>8</sup>"Vjerovatno" te godine

<sup>9</sup>Point sets na engleskom jeziku

## Hausdorff, manuskript 1912b, par. 6, Arhiv Univerziteta u Bonnu

Skupovi tačaka na pravoj liniji, u ravni, u prostoru, općenito u  $n$ -dimenzionalnom prostoru  $r = r_n$ . Tačka je definisana kao  $n$  realnih brojeva  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , čije koordinate su ortogonalne. Distanca između dvije tačke definišemo kao

$$x \cdot y = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq 0.$$

Okolinom  $U_x$  tačke  $x$  smatramo kolekciju svih tačaka  $y$  za koju  $x \cdot y < \rho$  ( $\rho$  pozitivan broj; unutrašnja površ "sfere" sa radijusom  $\rho$ ).

Radi svrha ilustracije, uobičajeno ćemo raditi sa ravni  $r = r_2$ ; ako broj dimenzija bude uzrokovao devijacije, to ćemo posebno napomenuti. Okoline imaju iduće osobine:

- ( $\alpha$ ) Svaka  $U_x$  sadrži  $x$  i sadržana je u  $r$ .
- ( $\beta$ ) Za svake dvije okoline iste tačke vrijedi  $U'_x \supseteq U_x$  ili  $U_x \supseteq U'_x$ .
- ( $\gamma$ ) Ako  $y$  leži u  $U_x$ , onda postoji okolina  $U_y$ , koja je sadržana u  $U_x$  ( $U_x \supseteq U_y$ ).
- ( $\delta$ ) ako  $x \neq y$ , onda postoje dvije okoline  $U_x, U_y$  bez zajedničke tačke: ( $\theta(U_x, U_y) = 0$ ).

Sljedeća razmatranja su bazirana samo na ovim osobinama. Ona su validna i u vrlo generalnom kontekstu, ako je  $r$  skup tačaka  $x$ , ako tačkama  $x$  odgovaraju skupovi tačaka  $U_x$  sa ove 4 osobine. Takav sistem, na primjer, je sljedeći: ako definiramo okolinu od  $x$  kao sistem tačaka gdje

$$|x_1 - y_1| < \rho, \quad y_2 = x_2;$$

okolina je onda horizontalni segment (bez krajnjih tačaka) dužine  $2\rho$ . Ili: ako definiramo kao okolinu sistem

$$|x_1 - y_1| < \rho, \quad |x_2 - y_2| < \rho,$$

u suštini unutrašnju površ kvadrata sa dužinama stranica  $2\rho$ , čiji je centar  $x$ , itd.

Prema nekima, do četiri aksioma okolina Hausdorffa je navela logička analiza temelja kompleksne analize. 1914. godine pojavljuje se pomenuti Hausdorffov udžbenik *Osnove teorije skupove*. Cantorovi radovi su često miješali point-set teoriju i apstraktna razmatranja, dok Hausdorff u ovom djelu pažljivo pravi distinkciju između generalne teorije skupova i point-set teorije. U poglavlju 7, on kratko diskutuje tri moguća pristupa da skup koji posmatramo samo kao sistem njegovih elemenata, bez razmatranja veza između elemenata, pretvorimo u prostor. Cilj mu je bio da definira generalni pojam prostora koji obuhvata ne samo  $\mathbb{R}^n$ , već i Riemannove površi, prostore sa beskonačnom dimenzijom i prostore čiji su elementi krive ili funkcije. Kao motivaciju za to daje dva argumenta: značajno pojednostavljenje teorije, i prevencija da nas intuicija odvede u stranputicu. Tri moguća pristupa se razlikuju u odabiru primitivnih pojmova, i to distance, limesa, i okoline. Koji od ova tri prostorna uređenja će biti izabran Hausdorff smatra lično preferencijom, ali također daje pojašnjenje šta se dobija, a šta gubi bilo kojim odabirom ova tri pristupa [KM99, str. 214].

Prije nego će navesti četiri aksioma koje smo već vidjeli u manuskriptu, Hausdorff topološki prostor karakterizira na sljedeći način:

*Topološki prostor  $E$  je skup čijim elementima (tačkama) su pridruženi određeni podskupovi  $U_x$ , koje nazivamo okolinama od  $x$ , i to u skladu sa sljedećim aksiomima [...].*

Hausdorffova generalizacija pojma prostora je jedan od glavnih doprinosa ujedinjenju matematike. Geometrija i analiza su bile razdvojene discipline, i aksiomatizacija je tomu stala u kraj. Hausdorff je uspio napraviti aksiomatizaciju koja je dovoljno generalna da opiše apstraktne prostore, ali i dovoljno restriktivna da da interesantnu teoriju. Njegova teorija topoloških i metričkih prostora je obuhvatila sve već postojeće rezultate i generisala nove pojmove i teoreme [KM99, str. 215].

Ovo sve će da doprinese procvatu topologije u 1920-im i 1930-im godinama i mnogi matematičari su dali doprinos polju gradeći na Hausdorffovim idejama. Istaknuti primjer je dvojac P. Alexandroffa i Paula Urysohna. Oni su, između ostalog, uveli definiciju kompaktnog skupa kakvu i danas poznajemo. Dalje pokazuju da je metrički prostor kompaktan akko svaki beskonačan podskup sadrži tačku gomilanja (tzv. Bolzano-Weierstrass osobina). Isti dvojac će dati i glavne rezultate o problemu metrizacije topološkog prostora. Naime, iako je svaki metrički prostor topološki prostor, postoje topološki prostori čije okoline ne mogu biti specificirane nijednom metrikom. Problem metrizacije je bio da se pronađu uslovi pod kojima topološki prostor može biti smatran metričkim, i neće biti potpuno riješen do ranih 50-ih [Bur10, str. 732].

## 2.4 Prelaz

Ovime završavamo pregled generalne topologije. Već možemo naslutiti da će u nadolazećim godinama nakon Hausdorffa geometrija i analiza, pa i dvije "vrste" topologija postajati sve više vezane, što će kulminirati u njihovom ujedinjenju, o čemu ćemo više reći u sljedećoj sekciji.

## 3 Sinteza

U ovom dijelu ćemo da vidimo kako su kroz vrijeme geometrijsko-kombinatorna topologija i generalna (point-set) topologija postajale jedna disciplina. Proces sinteze ćemo predložiti kroz razvoj nekoliko ključnih koncepata, kroz koje su se ove dvije historijske linije razvoja topologije ispreplele:

- dimenzija
- krive i patološki primjeri krivih
- mnogostrukost

### 3.1 Dimenzija

#### Prvi simptomi

U pismu datiranom 5. januara 1874., Cantor piše Dedekindu:

*Može li površ (recimo kvadrat sa svojim rubom) biti u bijektivnoj korespondenciji sa linijom (ili sa segmentom koji sadrži rubove) tako da svakoj tački površi odgovara tačka linije, i obrnuto, da svakoj tački linije odgovara tačka površi?*

Cantor je bio svjestan važnosti i težine ovog pitanja i razumio je da će većina matematičara odbaciti mogućnost takve korespondencije, i da je to nešto očigledno za šta dokaz nije ni potreban. Cantor će raditi na ovom problemu najvjerojatnije sa prekidima, od 1874. do aprila 1877., ali bez uspjeha. Na godišnjici Gaussovog 100. rođendana, Cantor je u razgovoru sa kolegama (između ostalih sa Heinrichom Weberom i Rudolphom Lipschitzom) spomenuo ovaj problem, na šta je većina rekla da je bijekcija između objekata različite dimenzije očito nemoguća. Ipak, Cantor je inzistirao na dokazu.

Ubrzo nakon toga, Cantor mijenja pristup, naime sada pokušava da konstruira željenu bijekciju. Ovo će se uskoro pokazati plodnim. Godine 1877. Georg Cantor dolazi do nevjerovatnog otkrića: postoji bijekcija između segmenta  $[0, 1]$  i kvadrata  $[0, 1] \times [0, 1]$ , i čak što više, i između jediničnog segmenta i  $n$ -dimenzionalne kocke. Što je i brzo javio svom prijatelju Dedekindu [Cri99, str. 4–5]:

*Koliko god se nećeš složiti sa mnom, mogu samo reći: vidim, ali ne vjerujem. ... površi, tijela, čak i neprekidne figure  $\rho$  dimenzija mogu biti stavljene u bijektivnu korespondenciju sa neprekidnim linijama, tj. sa jedno-dimenzionalnim figurama;...*

Implikacije ovog rezultata na pojam dimenzije, koji su geometri koristili intuitivno i neformalno, su Cantoru bile jasne. Na primjer, geometri su smatrali beskonačnost površi kvadratom beskonačnosti linije, ili beskonačnost kocke kao kub beskonačnosti linije. Stoga je imalo smisla pitati se da li intuitivni pojam dimenzije može biti dobro definisan i ima li uopće ikakvo značenje.

Bitno je naglasiti da je Cantor pristupao konceptu dimenzije sa negeometrijske pozicije. Njegov rad je bio baziran na bijekcijama i kardinalnosti, tj. iz tačke gledišta teorije skupova, na čijoj kreaciji je upravo tada i radio.

Prije Cantora, matematičari poput Dedekinda, Riemanna, Helmholtza su imali neformalno poimanje mnogostrukosti, koje je ovisilo od broja koordinata. Drugim riječima, pojam dimenzije je bio usko vezan sa brojem koordinata. Cantor će u još jednom pismu Dedekindu u junu 1877. izraziti stav da "...distinkcija između mnogostrukosti različitih dimenzija, mora biti tražena u drugim aspektima, potpuno različitim od broja koordinata..."

Dedekind, iako uvjeren u Cantorove rezultate, nije se slagao da su temelji geometrije potkopani, kako je bio sklon da tvrdi Cantor. Naime, on je vidio izlaz iz situacije preko neprekidnosti, koju su Riemann i Helmholtz podrazumijevali, ali sa upitnom eksplicitnošću. Kako god, postalo je nužno da se pojam dimenzije rigorozno preispita.

Sam Dedekind je shvatio da je potreban teorem o invarijantnosti dimenzije koji će inkorporirati neprekidnost. U pismu Cantoru u julu 1877., uspio je vrlo jasno formulisati problem i sljedeću tvrdnju, koja je u suštini teorem invarijante:

*Ako postoji bijektivna i kompletna korespondencija između tačaka neprekidne mnogostrukosti  $A$  koja ima  $a$  dimenzija, s jedne strane, i neprekidne mnogostrukosti  $B$  od  $b$  dimenzija s druge strane, onda ova bijekcija nužno mora biti prekidna ako su  $a$  i  $b$  različiti.*

Ispostaviće se da je ovaj teorem je bilo lakše formulisati nego dokazati, ali bilo je bitno da su se osjetljive tačke pojma dimenzije locirale.

Bitno je napomenuti da su neki izdavači matematičkih žurnala inicijalno smatrali Cantorov rezultat bizarnim, te prvobitno odbijali da objave njegove članke [Cri99, str. 5–7].

## Dimenzija kao invarijanta

Početak 1978. Cantor objavljuje "Doprinos teoriji mnogostrukosti", koji je uzrokovao nalet matematičke aktivnosti. Cilj je bio spasiti pojam dimenzije; paradoksalna korespondencije između mnogostrukosti različitih dimenzija je morala biti objašnjena. Pet matematičara su u istom periodu objave Cantorovog članka pokušavali da demonstriraju invarijantnost dimenzije, ali zbog nezrelosti topologije u to vrijeme, bili su osuđeni da koriste metode realne analize i jednostavne geometrije, što će se ispostaviti nedovoljnim za rezultat željene generalnosti.

Od tih pokušaja, izdvajamo onaj od Eugena Nettoa (1848-1919) iz 1878., koji je i Cantora najviše zainteresovao, i to iz razloga što se činio kao najbolji pokušaj da se teorem o invarijantnosti dokaže u punoj generalnosti, i što je pitanje dimenzije ubjedljivo stavio u domen topologije. Ipak, ni ovaj dokaz nije do kraja Cantora uvjerio da je situacija rješena, što znamo iz pisama Dedekindu. Tako će Cantor sam pokušati dati svoj dokaz 1879. godine, koji je bio induktivne prirode i u kom je demonstrirao kontradikciju sa teoremom o srednjoj vrijednosti. Cantorov dokaz će eventualno biti opovrgnut Peanovom inovacijom krive koja popunjava prostor, što će biti objavljeno tek jedanaest godina poslije, a do tada, situacija u topologiji i teoriji dimenzije će drastično biti izmijenjena.

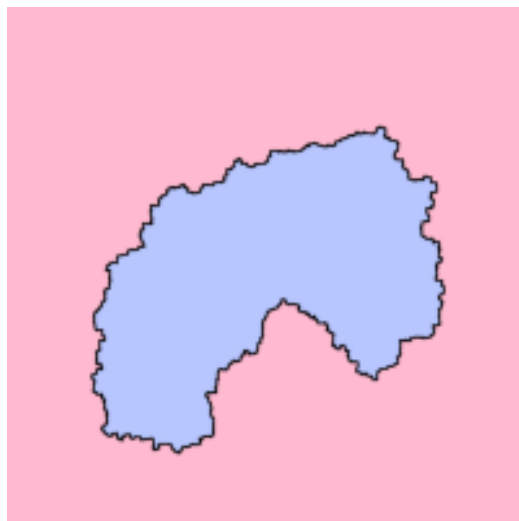
Kako god, sve ove nepotpunosti nisu uticale na sentiment matematičara o dimenziji u zadnje dvije decenije devetnaestog stoljeća: većina je bila pod dojmom da je invarijantnost dimenzije rigorozno uspostavljena [Cri99, str. 8–9].

## 3.2 Peano, Jordan i njihove krive

U mnogome matematički rivali, Giuseppe Peano (1858-1932) i Camille Jordan (1838-1922), su prvi koji su primjetili potencijal i važnost Cantorovih topoloških ideja za intuitivne geometrijske ideje.

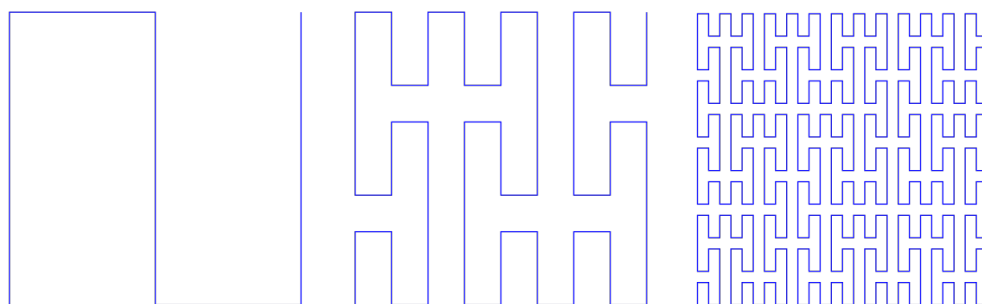
Među topolozima, Jordan je najpoznatiji zbog svog rada na teoriji zatvorenih krivih u ravni. Kao i Cantor, on je inzistirao da dokaže ono što je drugima bilo očigledno, a to je da jednostavna zatvorena kriva dijeli ravan na unutrašnji i vanjski dio. To ga je dovelo da formuliše i dokaže idući teorem [Cri99, str. 10].

**Teorem.** *Svaka neprekidna kriva  $C$  dijeli ravan u dva regiona, vanjski i unutrašnji; posljednji ne može biti reduciran na nulu, jer sadrži kružnicu konačnog prečnika.*



Slika 16: Kriva koja dijeli ravan na unutrašnji i vanjski dio [Wik26]

Peano je s druge strane 1890. otkrio fascinantnu vrstu krive: krivu koja popunjava prostor. Prije toga Peano se bavio analizom i primjenom analize na geometriju, kad je i definisao razne pojmove poput unutrašnje, vanjske i tačke na rubu. Špekulira se da ga je pristup teorije skupova inspirisao da misli o kontraintuitivnim situacijama, što je i rezultiralo njegovom spektakularnom krivom.



Slika 17: Tri iteracije konstrukcije Peanove krive. U graničnom procesu, kriva teži popunjenom kvadratu [Wik26].

Cantor, Peano i Jordan su bili toliko produktivni, da je to stvorilo kritičnu masu članaka, koja je motivisala dosta matematičara da prepoznaju potrebu za dubljim istraživanjima u generalnoj topologiji [Cri99, str. 10].

### 3.3 Hurwitz i njegov program

Jedan od tih matematičara je bio Adolf Hurwitz (1859-1919). Na Prvom Internacionalnom Kongresu Matematičara, održanom u Cirihu 1897., skicirao je plan za daljnje istraživanje unutar okvira teorijsko skupovne topologije. U svom predavanju, Hurwitz je izvršio pregled progresa u teoriji analitičnih funkcija. Konkretno, pokušao je precizno odrediti kakve krive su pogodne za upotrebu Cauchyevog integralnog teorema. U svojim nastojanjima da izađe na kraj s ovim problemima, Hurwitz ih stavlja u kontekst topologije zatvorenih skupova.

Njegov tretman je u mnogo čemu podsjećao na Cantorov rad na kardinalnim i ordinalnim brojevima. I to u smislu da se zatvoreni skupovi mogu grupisati (pridružiti klasama), na način da su u jednoj klasi skupovi koji su međusobno u bijektivnoj korespondenciji, i te skupovi je nazivao "ekvivalentnima". Hurwitz će potom prezentirati idući cilj:

Cilj *analysis situs*<sup>10</sup> je da se traže invarijante klasa skupova tačaka.

Hurwitz daje i primjer: Jordanova jednostavna zatvorena kriva je skup tačaka ravnini koji pripada klasi koje sadrže rub kvadrata. Drugim riječima, svojim programom Hurwitz je centralni problem traženja topoloških invarijanti stavio u kontekst point-set teorije, što je jedan od prvih i najkonkretnijih koraka u krčenju puta između geometrijske i generalne topologije.

Tako je tadašnja teorija skupova postala gnijezdo za patološke geometrijske primjere. Rani katalog neobičnih krivi može se naći u prvoj knjizi o teoriji skupova na engleskom: Teorija skupova tačaka, William H., Grace Chisholm Young (1906). Za matematičare dobro trenirane u Cantorovim metodama, topološka čudovišta su postala podnošljiva i manje strana. I dalje su bila odbojna onima koji su pokušavali da se bave "normalnom matematiku", ali patološke neobičnosti su bile važne za razvoj generalne topologije i njen prodor u druge sfere matematike [Cri99, str. 10, 11].

---

<sup>10</sup>Naziv koji je topologija u tom periodu nosila

### 3.4 Hausdorff i inicijalizacija sinteze

Formalno pomirenje geometrijsko-kombinatorne i generalne topologije dostiže vrhunac sa Hausdorffovim Osnovama teorije skupova objavljenim 1914. koje smo već spominjali. Bitno je napomenuti da je ovaj udžbenik bio na glasu kao izuzetno čitljiv.

U svojoj knjizi, Felix Hausdorff je prezentovao sintezu raznih rezultata point-set teorije kroz njegovu teoriju topoloških prostora. Spojio je fundamentalne geometrijske ideje i apstraktne analitičke koncepte Davida Hilberta, Mauricea Frecheta i Hermanna Weyla.

Još uvijek na tragu Bolzana i njegovog inzistiranja davanju preciznih definicija geometrijskim objektima, pojavom topoloških čudovišta, matematičari su bili stjerani u ćošak da intuitivnim definicijama stanu u kraj. Ovo će navesti Hausdorffa da pesimistično primjeti:

*Nismo dali definiciju konceptu krive; skupovi koji nose ovo ime po konvenciji su tako heterogene prirode da ne potpadaju pod bilo kakav razuman zajednički koncept.*

Iako su svi intuitivno dobro razumjeli pojam krive, niko nije mogao da adekvatno definiše generalni koncept krive. Svi pokušaji su bili ili preširoki (Jordan) i uključivali su patologije; ili preuski (Nels Lennes) i isključivali su bitne primjere krivih [Cri99, str. 18, 19].

### 3.5 Brouwerov doprinos, povratak dimenziji, i počeci algebarske topologije

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) je imao veliki uticaj na pojavu nove topologije u prvim godinama dvadesetog stoljeća. On je imao dosta drugačiji pogled na topologiju od Poincaréa. Radeći unutar okvira teorije skupova i generalne topologije, Brouwer je razvio topologiju do novih granica, i to sa svojom teorijom preslikavanja, stepena i dimenzije. Svoje glavne članke u topologiji je napisao između 1909. i 1913.

Iako je već objavljivao radove u klasičnoj geometriji, njegova doktorska teza, *O osnovama matematike* (1907), označava pravi početak njegove matematičke karijere. Ovaj rad je otkrio njegov dvojak interes u matematici koji će da bude vidljiv u njegovoj čitavoj karijeri: njegova briga za kritičku procjenu osnova matematike, koja će ga navesti da stvori intuicionizam, i njegovo duboko interesovanje za geometriju, zbog kojeg je imao vrlo bitan doprinos topologiji [Cri99, str. 14].

Vođen velikom ambicijom, Brouwer napada Hilbertov peti problem, što ga navodi da se bavi sa Schoenfliesovom *analysis situs*. Schoenflies je bio pratio Hurewiczovog programa, i bio je poznat po dokazu obrata Jordanovog teorema, kao i pokušajima da opiše topologiju ravni, i ostvari neke ostale ciljeve koje je Hurewicz zacrtao. 1909. Brouwer nalazi ozbiljne probleme u Schoenfliesovom radu, o čemu je pisao i Hilbertu. Kada je Brouwer završio sa popravkom Schoenfliesovog rada, jedino što je preživjelo je bio gore pomenuti obrat Jordanovog teorema, dok je većina teorije krivih ostala u ruševnom stanju. Konkretno, Brouwer će dati kontraprimjer koji pokazuje neadekvatnost Schoenfliesove definicije krive.

Iako je Brouwerov rad pokazao slabosti Schoenfliesove analize, Schoenfliesov rad je Brouweru poslužio kao odskočna daska. Što je potpuno drugačija situacija od Cantorove, koji je trideset godina ranije, često počinjao od ničega.

28-godišnji Brouwer 1909. godine u svojoj inauguralnoj lekciji kao docent na Univerzitetu u Amsterdamu predstavlja svoj program "Priroda geometrije" istraživanja u topologiji. Izučavanje grupa bijektivnih transformacija i skupova tačaka u ravni i višedimenzionalnim prostorima vodi ga ka *analysis situs*<sup>11</sup>. Potreba da klasificira ove grupe ga je dovela do teških problema u topologiji, što je jedan od najranijih svjedoka povezanosti apstraktne algebre i topologije [Cri99, str. 15].



Slika 18: S lijeva ka deson: P. Alexandroff, Brouwer, P. Urysohn (Iz Alexandroff arhiva) [Cri99, str. 19].

---

<sup>11</sup>Tadašnji naziv za topologiju

Brouwer je također bio fasciniran teoremom o invarijantnosti dimenzije, o kojem smo već govorili. Na 1.1.1910., Brouwer šalje pismo Davidu Hilbertu, u kojima skicira glavne ideje svojih uticajnih nadolazećih članaka. Te članke će Hans Freudenthal eventualno da opiše kao "kolijevku moderne topologije". Već marta iste godine, opet piše Hilbertu, ali ovaj put da ima djelomični dokaz teorema o invarijantnosti dimenzije. U junu Brouwer objavljuje "Dokaz o invarijantnosti broja dimenzije", koji će idućeg mjeseca biti popraćen još jednim remek djelom "O preslikavanju mnogostrukosti", u kojima dopunjuje neke ideje iz prvog rada.

Dokaz je pomeo sve prethodne pokušaje da se dokaže dimenzionalna invarijantnost. Lemu o kojoj je dokaz ovisio, Brouwer je dokazao svojim inovativnim metodama poput stepena preslikavanja, simpličke dekompozicije i aproksimacije preslikavanja. Iz te leme, bilo je jednostavno dokazati iduća dva teorema:

**Teorem 1.**  *$m$ -dimenzionalna mnogostrukost ne može sadržati sliku neprekidnog bijektivnog preslikavanja domena čija je dimenzija viša.*

**Teorem 2.** *U  $m$ -dimenzionalnoj mnogostrukosti slika neprekidnog bijektivnog preslikavanja domena manje dimenzije je nigdje gust skup tačaka.*

Dakle, topološka preslikavanja između mnogostrukosti ne mogu ni sniziti ni povećati dimenziju. Freudenthal će reći da je ovaj članak označio

*... početak nove paradigme i obećavajućih metoda, danas poznatih kao algebarska topologija. Demonstrira ideje simpličkog preslikavanja, baricentričnih ekstenzija, simpličke aproksimacije, malih modifikacija, i, implicitno, stepena preslikavanja i invarijantnosti istog pod homotopskom promjenom, i koncept klase homotopije. To je naprosto bila magija.*

Ovi članci su jasni danas, ali u svoje doba su bili teško razumljivi, upravo zbog svih novih ideja. Njihov uticaj će postati jasan i efektivan tek nekoliko godina poslije. Uistinu, bili su fundamentalni za kasnije algebarske teorije topologije [Cri99, str. 16].

Fundamentalna grupa je već bila intenzivno izučavana, ali u ovim ranim godinama je teško bilo pronaći rezultate koji pripadaju teoriji homotopije, sve do pojave Brouwerovih članaka objavljenih između 1910 i 1912, koji su nagovijestili novu eru topologije. U poređenju sa Poincaréom, njegove ekspozicije su bile vrlo rigorozne. Također je izbjegavao teoriju homologije, a opet Brouwer ima pravo da se smatra osnivačem teorije homotopije [Jam99].

Nakon objave rada "O prirodnom shvatanju dimenzije" (1913), u kojem je kritički preispitao Poincaréovu definiciju dimenzije, i dao svoju, Brouwer prestaje da se bavi sa popularnom matematikom svog vremena. Njegov fokus prelazi na predano izučavanje temelja matematike, i rada na intuicionističkom pristupu matematici, o kojem govorimo na samom kraju ovog rada [Cri99, str. 19].

## 3.6 O mnogostrukostima

### Riemann, temelji, geometrija

Razvoj pojma mnogostrukosti u periodu između 1850. i 1950. godine predstavlja monumentalni zaokret u matematici. Prije sredine 19. stoljeća, višedimenzionalni prostori uglavnom su tretirani kao analitičke apstrakcije, a ne kao geometrijski objekti. Formalno porijeklo pojma mnogostrukosti nalazi se u predavanju "Habilitationsvortrag" Riemanna iz 1854., u kojem je, pri nedostatku solidnih temelja matematika, bio osuđen oslanjati se na filozofiju. Riemann definiše mnogostrukost kao generalni pojam koji dopušta precizne specijalne slučajeve. Riemann je razlikovao „diskretne“ i „kontinuirane“ mnogostrukosti. Tako je Riemann skicirao konceptualni početak onog što će postati teorija skupova (diskretne mnogostrukosti) i topologija (neprekidne mnogostrukosti). Za liniju razvoja od Riemanna preko Dedekinda do Cantora, i teorije skupova, vidjeti djela Ferreirosa (1993, 1996). Riemann je predložio da se mnogostrukost karakterizira brojem funkcija (koordinata) potrebnih za lokalno određivanje tačke, uz priznanje da njeno globalno ponašanje može biti složeno. To je razvijeno kroz proučavanje Riemannovih površi, gdje je koristio „presjeka“ i brojeve povezanosti (preteče Bettijevih brojeva) za analizu topologije površi putem relacija granica [Sch99, str. 25, 30].

Do 1870-ih, mnogostrukosti su često svodene na tzv. „brojčane mnogostrukosti“, to jest podskupove od  $\mathbb{R}^n$  ili od projektivnog prostora. Ovo pojednostavljenje pomoglo je matematičarima poput Eugenio Beltramija (1835-1900) da interpretiraju neeuclidsku geometriju. U početku je Beltrami tražio „realnu podlogu“ za svoje modele putem izometričnih ugradnji u Euklidski prostor, ali nakon susreta s Riemannovim radom prihvatio je da se  $n$ -dimenzionalna mnogostrukost može definirati isključivo kao sistem konstantne zakrivljenosti, bez potrebe za ugradnjom [Sch99, str. 30–34].

### Teorijski stadij i Poincaréov konstruktivni pristup

Na prijelazu u 20. stoljeće, Henri Poincaré je kroz svoj niz revolucionarnih članaka u polju *analysis situs* pokrenuo je teorijski pristup istraživanja i karakterizacije mnogostrukosti bilo koje konačne dimenzije, plodan pristup dalekosežnog dometa u prošlom stoljeću. Poincaré nije koristio formalnu aksiomatsku definiciju mnogostrukosti; umjesto toga, izložio je konstruktivne postupke generisanja mnogostrukosti. Definirao je mnogostrukosti kao nultočke diferencijabilnih funkcija (koristeći uslov ranka Jakobijana) ili kao skup lokalno analitičkih parametrizacija povezanih putem analitičkog produženja. Ključno, Poincaré je uveo podjelu mno-

gostrukosti na ćelije i reprezentaciju mnogostrukosti kao konačnog geometrijskog ćelijskog kompleksa tzv. "polyedre", koja je omogućila kombinatornu analizu mnogostrukosti. Razlaganjem mnogostrukosti na ćelije razvio je račun incidenčnih matrica, homologije i torzionih invarijanata, čime je efektivno stvorio oblast kombinatorne topologije. Međutim, njegovo oslanjanje na intuitivne principe poput triangulabilnosti i Hauptvermutunga (postojanja zajedničke podjele) ostavilo je praznine koje su nadolazeći matematičari decenijama pokušavali razriješiti [Sch99, str. 39–41].

### **Elaboracija i sjedinjenje**

Dvadeseto stoljeće donijelo je potrebu za usklađivanjem aksiomatskog pristupa (zasnovanog na okolinama) s konstruktivnim pristupom (tj. kombinatornim i simplicijalnim tehnikama današnje algebarske topologije). Aksiomatsku liniju započeo je David Hilbert 1902. godine, skicirajući okvir za aksiomatsku teoriju dvodimenzionalnih mnogostrukosti zasnovanu na sistemima okolina, koju je Hermann Weyl 1913. godine dodatno razradio. Felix Hausdorff je 1914. godine pružio nužno logičko razjašnjenje uvođenjem aksioma separabilnosti, čime je pojam mnogostrukosti transformisan u poseban tip topološkog prostora. Kombinatornu liniju razvijali su Dehn i Heegaard (1907) te Steinitz (1908), koji su zagovarali čisto kombinatornu definiciju kako bi se izbjegle „logičke poteškoće“ topologije skupova tačaka. Brouwer povezo je ove svjetove uvođenjem „mjerenih“ simplicijalnih kompleksa (PL-struktura), dokazujući invarijantnost dimenzije i domene putem simplicijalne aproksimacije i stepena preslikavanja [Sch99, str. 46–50].

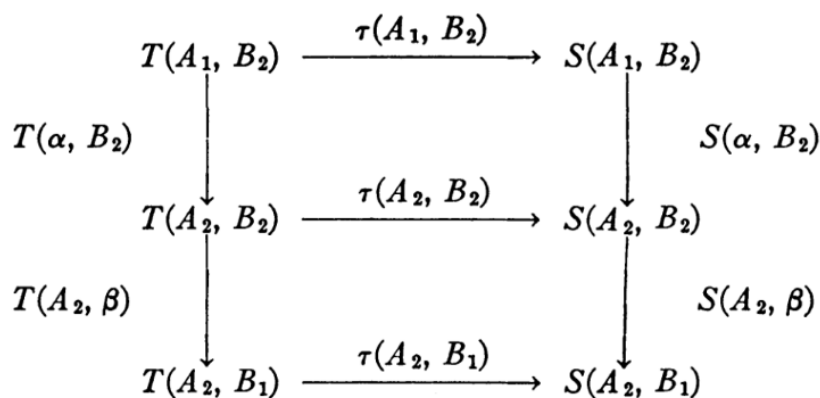
### **Konačna sinteza pristupa mnogostrukostima**

Konačna sinteza ostvarena je radom Veblena i J.H.C Whiteheada u periodu 1931-1932. godine. Oni su definirali mnogostrukosti pomoću regularnog grupoida (pseudogrupe) transformacija koje djeluju na Hausdorffov prostor. Time je pružena definitivna aksiomatska karakterizacija kontinuiranih (TOP), diferencijabilnih ( $C^r$ ), i analitičkih ( $C^\omega$ ) mnogostrukosti. Do 1940. godine pokazano je da kombinaorne i aksiomatske strategije mogu koegzistirati za diferencijabilne mnogostrukosti. Iako je Poincaréova intuicija konačno potvrđena ovim rigoroznim dokazima, 1950-e su ubrzo pokazale da ova unifikacija nije univerzalna u višim dimenzijama ( $n \geq 4$ ), gdje su otkrića egzotičnih struktura i netriangulabilnih mnogostrukosti razbila san o jednostavnom i uniformnom sturkturnom univerzumu [Sch99, str. 55–57].

## 4 Uticaj na modernu matematiku

### 4.1 Algebarska topologija i teorija kategorija

Samuel Eilenberg (1913-1998) i Norman Steenrod (1910-1971) su u jednom trenutku odlučili da aksiomatiziraju homologiju i kohomologiju, centralne koncepte algebarske topologije. Prva aksiomatizacija je nagoviještena u njihovom djelu *Aksiomatski pristup teoriji Homologije* (1945), ali će da bude objavljena tek 1952. i to u proslavljenom djelu istog dvojca, pod imenom *Osnovi algebarske topologije*, čije su glavne ideje bile već poznate ekspertima. Ovu teoriju su razvili koristeći jezik teorije kategorija, novog polja matematike koje je tada bilo još u nastanku. To će da ima revolucionaran efekat na matematičku notaciju, koja nije viđena još od vremena Descartesove djela *La Géométrie* (1637). Dijagrami koje je ovaj dvojac prezentovao ne samo da je učinio algebarsku topologiju čitljivijom, nego će se proširiti i na druge dijelove matematike. Vrijedno je i pomena da su autori ovdje uspjeli jasno i nedvosmisleno razdvojiti algebru od topologije i ovo je bio dio historijskog procesa razdvajanja homološke algebre od algebarske topologije, i njihovog nastajanja kao dvaju različitih predmeta [May99, str. 666], [BG99, str. 733].



Slika 19: Dijagram iz *Generalne teorije prirodnih ekvivalencija* (1945.)

Zvanično, kategorije, zajedno sa ključnim konceptima funktora i prirodnih transformacija se prvi put pojavljuju<sup>12</sup> baš te 1945. u djelu *Generalna teorija*

<sup>12</sup>Iako je djelo prezentovano još i 1942.

*prirodnih ekvivalencija* Eilenberga i Saundersa Mac Lanea (1909-2005). Ispostaviće se da dobar dio matematike, ne samo algebarske topologije, ne bi uopće postojao bez teorija kategorija [Mar23], [May99].

Poslije članka iz 1945., nije bilo odmah posve jasno da će teorija kategorija postati nešto više od samo zgodnog jezika. Upravo ovo je i bio status ove teorije nekih petnaest godina, i na ovaj način je upotrebljavana i u pomenutom djelom iz 1952., i u djelu Eilenberga i Henri Cartana (1904-2008) o homološkoj algebri iz 1956. Posljednja knjiga će da kristalizira i ujedini čitavo polje homološke algebre. Ova djela će da omoguće novim generacijama matematičara da uče algebarsku topologiju i homološku algebru direktno u kategoričkom jeziku, i da savladaju dijagramatsko rezonovanje. Uistinu, bez metoda "diagram chasing-a", mnogi rezultati u ovim djelima bi bili nezamislivi, ili bi u najmanju ruku zahtijevali dosta opsežniju prezentaciju [Mar23].

**PROPOSITION 2.5.** *Every exact sequence  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$  can be imbedded in a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Slika 20: Primjer dijagramatskog rezonovanja iz *Homološke algebre* (1956), Eilenberg, Cartan

Substantivnosti teorije kategorije svjedoči primjer da su omogućile da se algebarske strukture asociraju sa objektom (topološkim prostorom), i da na taj način dobijemo topološke osobine objekta. U algebarskoj topologiji, ova asocijacija je funktorijalna, što znači da ne samo da je moguće asocirati algebarsku strukturu



## Teorija toposa

Jedan od vrhunaca teorije kateogrija je nastanak teorije toposa, koja se na neki način vraća na svoje topološke korijene. Naime, zapanjujući aspekt te teorije je da ujedinjuje dvije naizgled potpuno različite matematičke oblasti: topologiju i algebarsku geometriju na jednoj strani, sa logikom i teorijom skupova na drugoj strani. Takozvani *topos*<sup>13</sup> je kategorija<sup>14</sup> koja se može smatrati i "generaliziranim prostorom" i "generaliziranim univerzumom skupova". Interesantno je da su se ove različite manifestacije toposa razvile nezavisno oko 1963. godine: prva sa Alexanderom Grothendieckom (1928-2014) u njegovoj reformulaciji teorije snopova<sup>15</sup> za svrhe algebarske geometrije; a druga sa Williamom Lawvereom (1937-2023) u njegovoj potrazi za aksiomatizacijom kategorije skupova, i Paulom Cohenom pri konstrukciji novih modela ZF teorije skupova [LM94, str. 1].

Topose ćemo dovesti i u kontekst sa Brouweruovom logikom intuicionizma, i vezu iste sa topologijom, na koje ćemo se kratko osvrnuti u nastavku.

## 4.2 Brouwerov intuicionizam i topologija

### Uvod

Nakon decenije rada na topologiji, 1913. godine, naposljetku rezolucije rada na pojmu dimenzije, Brouwer se povlači sa prvih linija tadašnjeg matematičkog istraživanja i svoje interesovanje reorijentiše ka temeljima matematike i logike.

Pravac intuicionizma u filozofiji matematike je osnovao Nizozemski matematičar L.E.J. Brouwer u ranom 20-om stoljeću, i vuče korijene još iz Brouwerove teze iz 1907. Brouwer je tvrdio da je matematika rezultat čisto konstruktivnih mentalnih aktivnosti ljudi, radije nego otkrivanje fundamentalnih principa koji postoje u objektivnoj realnosti. Unutar ovih okvira, logika postaje podređena matematici, i na nju se gleda kao jezik pomoću kojeg pohranjujemo i komuniciramo matematičke obrazce, a ne kao temeljni sistem matematike. Jer je u ovom sistemu istinitost izjednačena sa *mentalnom konstruktivnošću*, intuicionizam odbacuje zakon isključenja trećeg<sup>16</sup>, jer tvrdnje bez konkretne konstrukcije u intuicionizmu nisu dozvoljene. Konsekventno, Brouwer predlaže da se teoremi trebaju podijeliti na one koji su "istiniti" (konstruktivno dokazivi) i one koji su tek "nekontradiktorni".

---

<sup>13</sup>"mjesto" na Grčkom

<sup>14</sup>U smislu teorije kategorija

<sup>15</sup>Sheaf theory na engleskom

<sup>16</sup>Za beskonačne domene, za konačne skoro uvijek možemo naći konstruktivan dokaz

Iz intuicionizma će da proizađe intuicionistička logika, čime pokret dostiže svoj definitivni formalni stadij u kasnim 1920-im kroz rad Brouwerovog studenta Arenda Heytinga (1898-1980) i Andreia Kolmogorova (1903-1987). Formalizacija i objašnjenje značenja dokaza u intuicionističkoj logici, koja između ostalog, ne pretpostavlja zakon isključenja trećeg, je objašnjena u tzv. Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK) interpretaciji, i to je standardno objašnjenje intuicionističke logike [Att23].

### **Veza s topologijom, Tarski, Stone**

U topološkom prostoru komplement otvorenog skupa  $U$  je zatvoren ali obično nije otvoren, tako da među otvorenim skupovima "negacija" od  $U$  bi trebala biti unutrašnjost njegovog komplementa. Ovo ima za posljedicu da dupla "negacija" od  $U$ , nije nužno jednaka  $U$ . Dakle, algebra otvorenih skupova nije Booleanska, nego prati pravila intuicionističkog računa iskaza, kao što će među prvima to da primjete Marshall Harvey Stone (1903-1989) i Alfred Tarski (1901-1983). S obzirom da će ova pravila prvi formulirati Heyting, takvu algebru nazivamo Heytingovom algebrom. "Istinitosne vrijednosti" bilo kojeg toposa predstavljaju takvu Heyting algebru. Ispostaviće se da su Stone, Tarski, kao i Dana Scott (1932-) sa svojim topološkim modelima nagovijestili izvanredan rezultat: "intrinzična" logika toposa je općenito intuicionistička. Jedan primjer toga kako teorija toposa inkorporira Brouwerove ideje je topos sa realnim brojevima  $\mathbb{R}$  u kojem su sve funkcije  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne [LM94, str. 5, 6].

Tarski je 1937. na trećem Poljskom Matematičkom Kongresu predstavio svoje djelo (Račun iskaza i topologija)<sup>17</sup>. Ispod dajemo prijevod originalnog uvoda Tarskog, koji sažeto ukazuje na vezu topologije i logike u ovom kontekstu [Tar38].

---

<sup>17</sup>Originalni naslov na njemačkom jeziku: Aussagenkalkül und Topologie

## Račun iskaza i topologija

Alfred Tarski (Varšava)

U ovom radu želim ukazati na određene formalne veze između računa iskaza i topologije (i nekih drugih matematičkih teorija). Prije svega riječ je o topološkom tumačenju dvaju sistema računa iskaza, naime uobičajenog (dvo-vrijednosnog,  $\top$ ,  $\perp$ ) i intuicionističkog (Brouwer–Heytingovog) sistema: svakom iskazu  $\mathcal{A}$  računa iskaza pridružuje se na jednoznačan način iskaz  $\mathcal{A}_1$  iz topologije, tako da je  $\mathcal{A}$  dokaziv u dvo-vrijednosnom računu ako i samo ako  $\mathcal{A}_1$  vrijedi u svakom topološkom prostoru; analogno pravilo prevođenja daje se i za intuicionistički račun. Čini mi se da ova razmatranja nisu zanimljiva samo s čisto formalnog gledišta, nego i da na zanimljiv način rasvjetljavaju sadržajni odnos između dvaju sistema računa iskaza i intuicija koje im leže u osnovi.

Dalje, u "Drugom glavnom teoremu" Tarski uspostavlja da je logički iskaz dokaziv u intuicionističkom kalkulusu ako i samo ako je validan u svakom topološkom prostoru. Pod ovim preslikavanjem logičke operacije postaju topološko-prostorne, npr. negacija  $\neg A$  odgovara *vanjštini* skupa tj.  $R \setminus \overline{X}$ , a implikacija  $A \Rightarrow B$  odgovara *unutrašnjosti unije* komplementa od  $A$  i  $B$ , tj.  $R \setminus \overline{X - Y}$  [Tar38].

Odbacivanje zakona isključenja trećeg od strane konstruktivista je opravdano sa topološke strane i to zbog egzistencije *granice* skupa. U topološkom prostoru, unija otvorenog skupa i njegove vanjštine pokriva čitav skup samo ako je izoliran, dok u neprekidnim ili gustim prostorima, granica predstavlja tačke koje nisu ni u unutrašnjosti ni u vanjštini skupa. Ova granica formalno predstavlja intuicionistički pogled da neki iskazi nisu ni dokazivo istiniti ni dokazivo neistiniti [Tar38; Sto38].

Historijski, ova otkrića su služila da se rasvijetle intuicije Brouwera i Heytinga. Stone primjećuje da klasična logika može biti predstavljena operacijama iz teorije skupova, intuicionistička logika zahtijeva topološke operacije da bi bila precizno modelirana. Kada su dokazali da je logika "konstrukcijā" identična logici "otvorenih skupova", ovi članci su potvrdili da topologija i intuicionizam na neki način istražuju istu strukturnu realnost matematičkog prostora [Sto38].

## Završna riječ

Od geometrije, preko analize, pa sve do samih temelja matematike, uticaji topologije na modernu matematiku su brojni i duboki. Uticaj koje smo diskutovali svakako nisu jedini, žao nam je što priča o uticaju na, između ostalog, algebarsku geometriju i teoriju grafova prevazilazi opsege ovog rada, te bi istraživanje u ovom pravcu predstavljalo zgodnu nadopunu ovog sažetog pregleda. Također nismo pomenuli rad Johanna Benedicta Listinga (1808-1882), matematičara koji je bio pionir topologije i koji je tvorac naziva "topologija". Naposljetku, još jedna aktuelna i nova teorija nizvodno topologije, a o kojoj bismo voljeli da smo više rekli je teorija homotopije tipova (*HoTT-Homotopy Type Theory*), koja koristi intuicionističku teoriju tipova, baziranu na tipovima objekata na koje je primjenljiva intuicija teorije homotopije, jedan od centralnih koncepata algebarske topologije.

## Literatura

- [Sto38] Marshall Harvey Stone. „Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics”. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 067.1 (1938.), str. 1–25. URL: <http://eudml.org/doc/27235>.
- [Tar38] Alfred Tarski. „Der Aussagenkalkül und die Topologie”. *Fundamenta Mathematicae* 31.1 24 (1938.), str. 103–134. URL: <http://eudml.org/doc/213024>.
- [LM94] Saunders Mac Lane i Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory*. Springer, 1994.
- [BG99] James C. Becker i Daniel Henry Gottlieb. „A History of Duality in Algebraic Topolog”. *History of Topology*. Ur. I. M. James. Elsevier Science B.V., Amsterdam ; New York, 1999, 1999., str. 725–745.
- [Cri99] Tony Crilly. „The Emergence of Topological Dimension Theory”. *History of Topology*. Ur. I. M. James. Elsevier Science B.V., Amsterdam ; New York, 1999, 1999., str. 1–24.
- [Eyn99] Ria Vanden Eynde. „Development of the Concept of Homotopy”. *History of Topology*. Ur. I. M. James. Elsevier Science B.V., Amsterdam ; New York, 1999, 1999., str. 65–102.
- [Jam99] I.M. James. „From Combinatorial Topology to Algebraic Topology”. *History of Topology*. Ur. I. M. James. Elsevier Science B.V., Amsterdam ; New York, 1999, 1999., str. 561–573.

- [KM99] Teun Koetsier i Jan van Mill. „By Their Fruits Ye Shall Know Them: Some Remarks on the Interaction of General Topology with Other Areas of Mathematics”. *History of Topology*. Ur. I. M. James. Elsevier Science B.V., Amsterdam ; New York, 1999, 1999., str. 199–239.
- [May99] J.P. May. „Stable Algebraic Topology, 1945-1966”. *History of Topology*. Ur. I. M. James. Elsevier Science B.V., Amsterdam ; New York, 1999, 1999., str. 665–723.
- [Sch99] Erhard Scholz. „The Concept of a Manifold, 1850-1950”. *History of Topology*. Ur. I. M. James. Elsevier Science B.V., Amsterdam ; New York, 1999, 1999., str. 25–64.
- [Bur10] David Burton. *The History of Mathematics: An Introduction*. McGraw-Hill Education, 2010.
- [Sti10] John Stillwell. *Mathematics and Its History*. Springer, 2010.
- [Num14] Numberphile. *Ricci Flow - Numberphile*. 2014. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=hwOCqA9Xw6A>.
- [Geo20] Geodavic. *Octagonal Tilings of Hyperbolic Space*. Pristupljeno: 13 Februara 2026. 2020. URL: [https://github.com/geodavic/hyperdraw/blob/main/pi2\\_nocolor\\_label.pdf](https://github.com/geodavic/hyperdraw/blob/main/pi2_nocolor_label.pdf).
- [Wee20] Jeffrey R. Weeks. *The shape of space*. CRC Press, Boca Raton, 2020.
- [Att23] Mark van Atten. „*The Development of Intuitionistic Logic*”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2023 Edition)*. Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), Pristupljeno: 13 Februara 2026. 2023. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2023/entries/intuitionistic-logic-development/>.
- [Mar23] Jean-Pierre Marquis. „*Category Theory*”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2023 Edition)*. Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), Pristupljeno: 13 Februara 2026. 2023. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2023/entries/category-theory/>.
- [Šar24] Franjo Šarčević. *Kratki uvod u topologiju*. Sarajevo, Zagreb: Univerzitet u Sarajevu - Prirodno-matematički fakultet; Synopsis Zagreb-Sarajevo, 2024.
- [Wik26] Wikipedia. *Javno dostupne slike korištene u ovom radu*. Sve slike iz javnog domena. 2026. URL: <https://commons.wikimedia.org/>.