

Nesvojstveni integrali u \mathbb{R}^n

Atif Degirmendžić

Odsjek za matematičke i kompjuterske nauke - PMF - UNSA

2025

- 1 Nesvojstveni integrali u \mathbb{R}
 - Prve vrste
 - Druge vrste

- 1 Nesvojstveni integrali u \mathbb{R}
 - Prve vrste
 - Druge vrste
- 2 Riemannov integral u \mathbb{R}^n
 - Na intervalu
 - Integracija po dopustivom/Jordan mjerljivom skupu
 - O mjeri

- 1 Nesvojstveni integrali u \mathbb{R}
 - Prve vrste
 - Druge vrste
- 2 Riemannov integral u \mathbb{R}^n
 - Na intervalu
 - Integracija po dopustivom/Jordan mjerljivom skupu
 - O mjeri
- 3 Nesvojstveni integrali u \mathbb{R}^n
 - Ideja i osnovni pojmovi
 - Gaussov integral
 - Kriterij poređenja
 - Apsolutna konvergencija
 - Rad u praksi
 - Smjena promjenljivih
 - Specifičnost i interesantnost ns. integrala višeg reda

Nesvojstveni integrali u \mathbb{R}

Proširujemo pojam određenog Riemannovog integrala na slučajeve kada uobičajene pretpostavke, poput ograničenosti integrirajućeg skupa ili podintegralne funkcije, ne vrijede.

Granični procesi nam omogućavaju da definišemo nesvojstvene integrale u \mathbb{R} , što će biti slučaj i u \mathbb{R}^n , ali kao što ćemo vidjeti, na malo drugačiji način.

Uvod - Nesvojstveni integrali prve vrste

Kod prve vrste, integriramo po neograničenom intervalu, ili čitavom \mathbb{R} :

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x)dx$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x)dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x)dx$$

Uvod - Nesvojstveni integrali druge vrste

Kod druge vrste, podintegralna funkcija f je neograničena u okolini tačke $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

Riemannov integral u \mathbb{R}^n

Riemannova integralna suma:

$$\sigma(f, P, \xi) := \sum_{k=1}^m f(\xi_k) |I_k|$$

Riemannov integral funkcije f po n -dimenzionalnom intervalu I :

$$\int_I f(x) dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \xi)$$

Radi kompletности, a i eventualne buduće potrebe, navedimo još Lebesgueov kriterij za Riemann integrabilnost:

Teorem

Funkcija f je Riemann integrabilna na intervalu I akko je f ograničena na I i skoro svugdje neprekidna na I .

Integracija po dopustivom/Jordan mjerljivom skupu

Ključni pojmovi:

Definicija: Skup mjere nula (Lebesgue)

Skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je skup (n -dimenzionalne) mjere nula, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji najviše prebrojiv pokrivač $\{I_j\}$ od D , pri čemu su I_j n -dimenzionalni intervali, takvi da suma njihovih zapremina $\sum_j |I_j|$ nije veća od ε .

Definicija: Dopustiv skup

Skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je *dopustiv* ako je ograničen i ako mu je rub ∂D mjere nula (u Lebesgueovom smislu).

Definicija: funkcija produžena nulom van D

$$f_D(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$$

Pri čemu f def. na D - (bilo kakav podskup \mathbb{R}^n).

Integracija po dopustivom/Jordan mjerljivom skupu

Tvrdnja:

Neka je D sada dopustiv skup. f_D je neprekidna gotovo svuda na \mathbb{R}^n akko je funkcija f neprekidna gotovo svuda na D . (Isto vrijedi i za interval $I \supseteq D$, umjesto \mathbb{R}^n)

Definicija: Integral funkcije f po dopustivom skupu D

$$\int_D f(x)dx := \int_{I \supseteq D} f_D(x)dx$$

Pri čemu je integral sa desne strane u definiciji iznad već nam poznati integral po n -dimenzionalnom intervalu.

Tvrdnja

Ako je funkcija f_D integrabilna jednom intervalu koji sadrži D , ona je integrabilna na svakom takvom intervalu.

Ova tvrdnja zgodno nagovještava svoj analogon u teoriji nesvojstvenih integrala višeg reda.

Teorem analogan Lebesgueovom pomenutom teoremu za Riemann integrabilnost po intervalu:

Teorem: Lebesgue 2

Funkcija f definisana na dopustivom skupu D je integrabilna na D akko je ona ograničena na D i gotovo svuda neprekidna na D .

Opet Lebesgue... ovo je dobar trenutak da se zaustavimo i kažemo ponešto o mjeri, i tome zašto sve vrijeme u naslovima inzistiramo na "dopustivom/Jordan mjerljivom skupu" i zbog čega nam je to bitno za nesvojstvene integrale višeg reda.

Definicija: Jordanova mjera proizvoljnog ograničenog skupa
 $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu(D) := \int_D 1 \cdot dx$$

Ali jer¹ $\int_D 1 \cdot dx = \int_{I \supseteq D} \chi_D(x) dx$, i svi prekidi od χ_D su na skupu
 mjere nula ∂D , dobijamo da vrijedi sljedeće:

Jordanova mjera u smislu definicije iznad je definisana samo za
 dopustive skupove. Drugim riječima, samo dopustivi skupovi su
 mjerljivi u smislu definicije iznad.

¹ χ_D je karakteristična funkcija skupa D

Geometrijsko značenje Jordanove mjere $\mu(D)$

Kakvo geometrijsko značenje ima Jordanova mjera μ ?

Ako integral $\mu(D) = \int_{I \supseteq D} \chi_D(x) dx$ postoji, onda mora vrijediti

$$\mu(D) = \int_{I \supseteq D} \chi_D(x) dx = \int_{\overline{I \supseteq D}} \chi_D(x) dx = \overline{\int_{I \supseteq D} \chi_D(x) dx}$$

Pri čemu su zadnja dva integrala donji i gornji Darbouxov integral redom, s lijeva na desno.

Donja suma aproksimira zapreminu unije intervala induciranih podjelom P , koji su potpuno sadržani u skupu D (tj. "opisani" skupom D), a gornja suma aproksimira zapreminu unije intervala kojima je "opisan" skup D (tj. koji su nisu potpuno sadržani u skupu D , već ga sijeku).

Ako ove dvije sume zapremina teže istoj vrijednosti kada $\lambda(P) \rightarrow 0$, vrijednost $\mu(D)$ postoji, i slaže se sa našim intuitivnim poimanjem zapremine.

Definicija: Jordan mjerljivi skupovi

Skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je Jordan-mjerljiv ako je ograničen i njegov rub ∂D ima mjeru nula.

Zvuči poznato...

Napomena: Jordanova mjera nije prava mjera, jer Jordan-mjerljivi skupovi ne formiraju σ -algebru.

- Jordan-mjerljivost jači uslov od Lebesgue-mjerljivosti \implies Jordan-mjerljivi skupovi su Lebesgue-mjerljivi (obrnuto ne vrijedi! primjer: \mathbb{Q})
- Na kompaktnim skupovima, pojmovi skupa mjere nula koincidiraju: Kompaktan skup u \mathbb{R}^n je mjere nula u Lebesgueovom smislu akko je on mjere nula u Jordanovom smislu.
- Rub dopustivog skupa je zatvoren, i ograničen po definiciji pa je kompaktan

Sve prethodno rečeno nas dovodi do sljedeće tvrdnje:

Tvrdnja:

Dopustivi skupovi su Jordan mjerljivi skupovi i Jordan mjerljivi skupovi su dopustivi skupovi.

Ovo nam je od značaja, jer pri definisanju nesvojstvenih integrala se udaljavamo od pojma *dopustivog* skupa, i koristimo ekvivalentan pojam *Jordan-mjerljivog* skupa.

Nesvojstveni integrali u \mathbb{R}^n

Definicija: Popunjenje (ili popunjavajući niz)

Popunjenje skupa $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je niz $\{D_n\}$ Jordan-mjerljivih skupova, takvih da $D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq D$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$.

Lema Teorema

Ako je $\{D_n\}$ popunjenje Jordan-mjerljivog skupa $D \subseteq \mathbb{R}^n$, tada:

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_n) = \mu(D)$
- 2 Za svaku funkciju $f \in \mathcal{R}(D)$ je i $f|_{D_n} \in \mathcal{R}(D_n)$ i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx = \int_D f(x) dx$$

Definicija: Nesvojstveni integral u \mathbb{R}^n

Neka je $\{D_n\}$ popunjenje skupa D , i neka je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna na skupovima $D_n \in \{D_n\}$. Ako limes

$$\int_D f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx$$

postoji i ima istu konačnu vrijednost za sva popunjenja od D , tada ovaj limes nazivamo *nesvojstvenim integralom* funkcije f po skupu D .

Notaciju na lijevoj strani koristimo za bilo koju funkciju f definisanu na D , ali samo kada limes u definiciji iznad postoji kažemo da integral na lijevoj strani konvergira, ili postoji.

Dovoljnost konvergencije jednog popunjenja

Definicija nalaže da konvergenciju nesvojstvenog integrala moramo provjeriti za sva popunjenja...

Ali popunjenja ima malo previše...

U spas nam stiže iduća propozicija:

Propozicija

Ako je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nenegativna, i limes u definiciji nesvojstvenog integrala postoji za bar jedno popunjenje $\{D_n\}$ skupa D , tada nesvojstveni integral od f na D konvergira.

Gaussov integral i primjena propozicije

Primjer:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

- 1 Popunjenje ravni (otvorenim) diskovima $\{D_n\}$
- 2 Popunjenje ravni kvadratima $\{K_n\}$

Koristeći popunjenje diskovima, računom se pokaže da je $I = \pi$, a iz prethodne propozicije slijedi da i za popunjenje kvadratima integral mora imati istu vrijednost. Koristeći tu činjenicu, možemo dobiti vrijednost Gaussovog² integrala:

$$I = \iint_{K_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-n}^n e^{-t^2} \right)^2 \implies \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$$

²Poisson i Euler se također dovode u vezu s ovim integralom, i ponekad nosi naziv i po njima

Kriterij poređenja za nesvojstvene integrale

Kriterija poređenja za redove ima svoj analogon za nesvojstvene integrale u \mathbb{R} , a slično vrijedi i u \mathbb{R}^n :

Propozicija: Kriterij poređenja

Neka su f i g definisane na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i integrabilne na istim mjerljivim podskupovima skupa D i neka $|f(x)| \leq g(x)$ na D . Ako integral $\int_D g(x)dx$ konvergira, onda i integrali $\int_D |f(x)|dx$ i $\int_D f(x)dx$ također konvergiraju.

U dokazu ove propozicije skoro džaba dobijemo da aditivnost i homogenost vrijede za nesvojstvene integrale.

Osim toga, pokaže se da konvergencija integrala od $|f|$ implicira konvergenciju integrala od f . Međutim, može se pokazati i da vrijedi nešto slično tomu, nešto iznenađujuće...

Do sada smo i kod redova, i kod nesvojstvenih integrala u \mathbb{R} razlikovali apsolutnu i običnu (uslovnu) konvergenciju. Ali za nesvojstvene integrale u \mathbb{R}^n uistinu, vrijedi³ sljedeća tvrdnja:

Tvrdnja o apsolutnoj integrabilnosti (konvergenciji)

$\int_{D \subseteq \mathbb{R}^n} f(x) dx$ konvergira akko konvergira apsolutno.

Ako se naivno zaletimo, i probamo primjeniti metod popunjenja za nesvojstvene integrale u \mathbb{R} , primjeri kao što su funkcije $\frac{\sin x}{x}$, $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ za $x \in [n-1, n)$ pokažu da tvrdnja iznad ne vrijedi, tj. da obična i apsolutna konvergencija nisu ekvivalentne. Drugim riječima, njihovi integrali ne postoje u smislu definicije koju smo uveli za nesvojstvene integrale u \mathbb{R}^n .

³za $n > 1$

- Neka $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, i neka f neograničena na skupu $E \subseteq \partial D$
- Uzmemo ε -okolinu od E , i uklonimo je iz D
- Dobijemo $D(\varepsilon) \subseteq D$
- Pustimo $\varepsilon \rightarrow 0$, tada $D(\varepsilon)$ generiraju popunjenje od D

Ako D neograničen, onda uzimamo D -komplemente okoline beskonačnosti.

Ove specijalne okoline omogućavaju generalizaciju glavne vr. nesvojstvenog integrala na više dimenzije.

Smjena promjenljivih je potpuno analogna kao kod određenih integrala u \mathbb{R}^n .

Teorem:

Neka $\phi : D_t \rightarrow D_x$ difeomorfizam oblasti D_t i D_x . Neka $f(x)$ skalarna funkcija na D_x , takva da je integrabilna na mjerljivim kompaktnim podskupovima od D_x . Tada, ako konvergira nesvojstveni integral $\int_{D_x} f(x)dx$, onda konvergira i integral $\int_{D_t} (f \circ \phi)(t) |\det \phi'(t)| dt$, i ovi integrali su jednaki.

Specifičnost i interesantnost ns. integrala višeg reda

Nesvojstveni integrali višeg su čudan ali i moćan alat. Dozvoljavaju nam da lahko mijenjamo oblasti po kojima integriramo, te da pomoću njih računamo i integrale u \mathbb{R} , kao što smo vidjeli na primjeru Gaussovog integrala.

Pored toga imamo i fenomen da su apsolutna i obična konvergencija ekvivalentne. Često je lakše ispitivati apsolutnu konvergenciju, a ako ona ne vrijedi, onda u ovom kontekstu znamo da ne vrijedi ni obična konvergencija, što može biti korisno. Ova činjenica je još jedan primjer da intuicije iz malih dimenzija, ili \mathbb{R} , ne vrijede u većim dimenzijama, ili kao što je ovdje slučaj, da ne vrijede već za $\dim = 2$.

The End