Integrali koji zavise od parametra

Atif Degirmendžić

Odsjek za matematičke i kompjuterske nauke - PMF - UNSA

2026

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Uvod i motivacija

Šta je integral koji ovisi od parametra?

Definicija

Integral koji zavisi od parametra je funkcija oblika

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_{E_y} f(x,y)dx$$

- y igra ulogu parametra i prolazi skupom Y
- Za svaku vrijednost $y \in Y$ postoji skup E_y na kojem je $\varphi_y(x) = f(x,y)$ integrabilna

Definicija

Najčešće nas zanimati slučaj kada su Y i E_y intervali, pa ćemo se koristiti idućom definicijom

Definicija

- Neka $f(x,y)$ funkcija definisana na $[a,b] \times Y$
- Neka je za svako fiksno $y \in Y$ funkcija f integrabilna na $[a,b]$

Tada je integral

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

funkcija parametra y.

Motivacija

Zašto su nam ovi integrali interesantni?

Motivacija

Zašto su nam ovi integrali interesantni?

- Integral funkcije dvije varijable možemo posmatrati kao funkciju, a ne kao broj, koju sada možemo analizirati metodama analize

Motivacija

Zašto su nam ovi integrali interesantni?

- Integral funkcije dvije varijable možemo posmatrati kao funkciju, a ne kao broj, koju sada možemo analizirati metodama analize
- Tada ima smisla postavljati pitanja o ponašanju pod graničnim procesima, neprekidnosti, diferencijabilnosti, integrabilnosti, ekstremima itd.

Motivacija

Zašto su nam ovi integrali interesantni?

- Integral funkcije dvije varijable možemo posmatrati kao funkciju, a ne kao broj, koju sada možemo analizirati metodama analize
- Tada ima smisla postavljati pitanja o ponašanju pod graničnim procesima, neprekidnosti, diferencijabilnosti, integrabilnosti, ekstremima itd.
- Mnoge specijalne funkcije pojavljuju se kao rješenja diferencijalnih jednačina i definišu se pomoću integrala koji zavise od parametra. Na primjer, gamma funkcija:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

Primjene

Primjene

- Diferencijalne jednačine, npr. rješenja linearnih ODJ 2. reda:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)\, f(s)\, ds + y_{\mathrm{hom}}(t)$$

Primjene

- Diferencijalne jednačine, npr. rješenja linearnih ODJ 2. reda:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)\, f(s)\, ds + y_{\mathrm{hom}}(t)$$

- Statistika, npr. Fisherova informacija

$$\mathcal{I}(\theta) = \int \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x;\theta) \right)^2 f(x;\theta)\, dx$$

Primjene

- Diferencijalne jednačine, npr. rješenja linearnih ODJ 2. reda:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)\, f(s)\, ds + y_{\text{hom}}(t)$$

- Statistika, npr. Fisherova informacija

$$\mathcal{I}(\theta) = \int \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x;\theta) \right)^2 f(x;\theta)\, dx$$

- Fizika; parametri mogu predstavljati vrijeme, temperaturu itd. Konkretno, u toplotnoj jednačini

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

Primjene

- Diferencijalne jednačine, npr. rješenja linearnih ODJ 2. reda:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)\, f(s)\, ds + y_{\text{hom}}(t)$$

- Statistika, npr. Fisherova informacija

$$\mathcal{I}(\theta) = \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x;\theta) \right)^2 f(x;\theta)\, dx$$

- Fizika; parametri mogu predstavljati vrijeme, temperaturu itd. Konkretno, u toplotnoj jednačini

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

U svim ovim slučajevima, ponašanje integrala kada parametar varira je važnije nego računanje samog integrala.

Uvodni primjer

$$\mathcal{I}(y) = \int_0^{\pi} \cos(yx)dx$$

Uvodni primjer

$$\mathcal{I}(y) = \int_0^{\pi} \cos(yx)dx$$

- $\mathcal{I}'(y) = \Big(\int_0^{\pi} \cos(yx)dx\Big)'_y = ?$

Uvodni primjer

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^{\pi} \cos(yx)dx$$

- $\mathcal{I}'(y) = \Big(\int\limits_0^{\pi} \cos(yx)dx\Big)'_y = ?$
- $\int\limits_0^{\pi} (\cos(yx))'_y dx = ?$

Uvodni primjer

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^{\pi} \cos(yx)dx$$

- $\mathcal{I}'(y) = \Big(\int\limits_0^{\pi} \cos(yx)dx\Big)'_y = \,?$
- $\int\limits_0^{\pi} (\cos(yx))'_y dx = \,?$

Ispostavi se:

$$\mathcal{I}'(y) = \int\limits_0^{\pi} (\cos(yx))'_y dx$$

tj. možemo "ući" sa izvodom pod integral u ovom primjeru.

Uvodni primjer

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^{\pi} \cos(yx)dx$$

- $\mathcal{I}'(y) = \Big(\int\limits_0^{\pi} \cos(yx)dx\Big)'_y = ?$
- $\int\limits_0^{\pi} (\cos(yx))'_y dx = ?$

Ispostavi se:

$$\mathcal{I}'(y) = \int\limits_0^{\pi} (\cos(yx))'_y dx$$

tj. možemo "ući" sa izvodom pod integral u ovom primjeru.

Nameće se pitanje:

Je li uvijek vrijedi $\mathcal{I}'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$? Ako ne, pod kojim pretpostavkama vrijedi? Saznaćemo u nastavku!

Teorija integrala koji zavise od parametra

Prelazak na limes pod znakom integrala

Zanimaće nas:

[1]Ova propozicija u kombinaciji sa poopštenim Dinijevim teoremom nam daje nešto slabije uslove od unif. konv. za zamjenu limesa i integrala.

Prelazak na limes pod znakom integrala

Zanimaće nas:

1. Kada limes može ući pod integral?

[1] Ova propozicija u kombinaciji sa poopštenim Dinijevim teoremom nam daje nešto slabije uslove od unif. konv. za zamjenu limesa i integrala.

Prelazak na limes pod znakom integrala

Zanimaće nas:

1. Kada limes može ući pod integral?
2. Kada je $\mathcal{I}(y)$ neprekidna funkcija?

[1] Ova propozicija u kombinaciji sa poopštenim Dinijevim teoremom nam daje nešto slabije uslove od unif. konv. za zamjenu limesa i integrala.

Prelazak na limes pod znakom integrala

Zanimaće nas:

1. Kada limes može ući pod integral?
2. Kada je $\mathcal{I}(y)$ neprekidna funkcija?

Propozicija[1] koja slijedi nam daje dovoljne uslove za zamjenu limesa i integrala.

[1] Ova propozicija u kombinaciji sa poopštenim Dinijevim teoremom nam daje nešto slabije uslove od unif. konv. za zamjenu limesa i integrala.

Prelazak na limes pod znakom integrala

Zanimaće nas:

1. Kada limes može ući pod integral?
2. Kada je $\mathcal{I}(y)$ neprekidna funkcija?

Propozicija[1] koja slijedi nam daje dovoljne uslove za zamjenu limesa i integrala.

Propozicija

Ako $f(x,y)$ integrabilna po $x \in [a,b]$ za fiksno y, i ako $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, kad $y \to y_0$, onda vrijedi

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

[1] Ova propozicija u kombinaciji sa poopštenim Dinijevim teoremom nam daje nešto slabije uslove od unif. konv. za zamjenu limesa i integrala.

Neprekidnost $\mathcal{I}(y)$

Iduća propozicija nam daje dovoljne uslove za neprekidnost $\mathcal{I}(y)$.

Neprekidnost $\mathcal{I}(y)$

Iduća propozicija nam daje dovoljne uslove za neprekidnost $\mathcal{I}(y)$. Poslije će nam biti potrebna da dokažemo tvrdnju o zamjeni poretka integrala.

Neprekidnost $\mathcal{I}(y)$

Idućа propozicija nam daje dovoljne uslove za neprekidnost $\mathcal{I}(y)$. Poslije će nam biti potrebna da dokažemo tvrdnju o zamjeni poretka integrala.

Propozicija

Ako $f(x,y)$ definisana i neprekidna na $[a,b] \times [c,d]$, onda je $\mathcal{I}(y)$ neprekidna funkcija na $[c,d]$.

Neprekidnost $\mathcal{I}(y)$

Iduća propozicija nam daje dovoljne uslove za neprekidnost $\mathcal{I}(y)$. Poslije će nam biti potrebna da dokažemo tvrdnju o zamjeni poretka integrala.

Propozicija

Ako $f(x,y)$ definisana i neprekidna na $[a,b] \times [c,d]$, onda je $\mathcal{I}(y)$ neprekidna funkcija na $[c,d]$.

Napomene:

1. Primjetimo da zbog kompaktnosti intervala $[c,d]$ odmah dobijemo i uniformnu neprekidnost $\mathcal{I}(y)$.

Neprekidnost $\mathcal{I}(y)$

Iduća propozicija nam daje dovoljne uslove za neprekidnost $\mathcal{I}(y)$. Poslije će nam biti potrebna da dokažemo tvrdnju o zamjeni poretka integrala.

Propozicija

Ako $f(x,y)$ definisana i neprekidna na $[a,b] \times [c,d]$, onda je $\mathcal{I}(y)$ neprekidna funkcija na $[c,d]$.

Napomene:

1. Primjetimo da zbog kompaktnosti intervala $[c,d]$ odmah dobijemo i uniformnu neprekidnost $\mathcal{I}(y)$.
2. Propozicija vrijedi i ako $[c,d]$ zamijenimo sa proizvoljnim kompaktnim skupom K, svakako ako f neprekidna na $[a,b] \times K$.

Diferenciranje pod integralom

Diferenciranje pod integralom

Leibnizovo pravilo:

Diferenciranje pod integralom

Leibnizovo pravilo:

$$\mathcal{I}'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

pod pretpostavkom da $\mathcal{I}'(y)$ postoji.

Diferenciranje pod integralom

Leibnizovo pravilo:

$$\mathcal{I}'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

pod pretpostavkom da $\mathcal{I}'(y)$ postoji.

Međutim, ovo pravilo nije uvijek dozvoljeno, kada jeste, onda kažemo da funkciju $\mathcal{I}(y)$ možemo diferencirati po parametru pod znakom integrala.

Diferenciranje pod integralom

Leibnizovo pravilo:

$$\mathcal{I}'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

pod pretpostavkom da $\mathcal{I}'(y)$ postoji.

Međutim, ovo pravilo nije uvijek dozvoljeno, kada jeste, onda kažemo da funkciju $\mathcal{I}(y)$ možemo diferencirati po parametru pod znakom integrala.

Već smo vidjeli primjer funkcije za koju Leibnizovo pravilo vrijedi:

$$\cos(yx),\ \text{za } (x,y) \in [0,\pi] \times [c,d],\ \ c,d \in \mathbb{R} \text{ proizvoljni}$$

Teorem o diferenciranju pod integralom

Idući teorem nam daje dovoljne uslove za diferenciranje pod znakom integrala.

Teorem o diferenciranju pod integralom

Idući teorem nam daje dovoljne uslove za diferenciranje pod znakom integrala.

Teorem

Neka $f(x,y)$ definisana na $P = [a,b] \times [c,d]$ i neprekidna po x na $[a,b]$ za proizvoljno fiksno $y \in [c,d]$. Neka $f'_y(x,y)$ postoji na čitavom P i neka je neprekidan kao funkcija dviju promjenljivih. Tada za svako $y \in [c,d]$ vrijedi Leibnizovo pravilo.

Teorem o diferenciranju pod integralom

Idući teorem nam daje dovoljne uslove za diferenciranje pod znakom integrala.

Teorem

Neka $f(x,y)$ definisana na $P=[a,b]\times[c,d]$ i neprekidna po x na $[a,b]$ za proizvoljno fiksno $y\in[c,d]$. Neka $f'_y(x,y)$ postoji na čitavom P i neka je neprekidan kao funkcija dviju promjenljivih. Tada za svako $y\in[c,d]$ vrijedi Leibnizovo pravilo.

Napomene:

Teorem o diferenciranju pod integralom

Idući teorem nam daje dovoljne uslove za diferenciranje pod znakom integrala.

Teorem

Neka $f(x,y)$ definisana na $P=[a,b]\times[c,d]$ i neprekidna po x na $[a,b]$ za proizvoljno fiksno $y\in[c,d]$. Neka $f'_y(x,y)$ postoji na čitavom P i neka je neprekidan kao funkcija dviju promjenljivih. Tada za svako $y\in[c,d]$ vrijedi Leibnizovo pravilo.

Napomene:

1. Teorem vrijedi i kada $[c,d]$ zamijenimo sa proizvoljnim konveksnim kompaktnim skupom u bilo kojem normiranom vektorskom prostoru
2. Leibnizova formula se može primjeniti na funkcije $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$, i to može biti vrlo korisno

Primjeri diferenciranja pod integralom

- $\int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$ zadovoljava Besselovu nejednakost: $x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$, ODJ koja je sveprisutna u fizici

[2] Pojavljuju se u klasičnoj mehanici, savremenoj fizici, povezani su eliptičkim funkcijama i krivima koje su bitne u teoriji brojeva i kriptografiji

Primjeri diferenciranja pod integralom

- $\int\limits_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$ zadovoljava Besselovu nejednakost: $x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$, ODJ koja je sveprisutna u fizici
- Računanje eliptičkih integrala[2]:

$$E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - k^2 sin^2\varphi)}d\varphi, \quad K(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}}$$

su funkcije parametra $k : 0 < k < 1$ i vezani su sa $\frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k}$

[2] Pojavljuju se u klasičnoj mehanici, savremenoj fizici, povezani su eliptičkim funkcijama i krivima koje su bitne u teoriji brojeva i kriptografiji

Primjeri diferenciranja pod integralom

- $\int\limits_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$ zadovoljava Besselovu nejednakost: $x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$, ODJ koja je sveprisutna u fizici
- Računanje eliptičkih integrala[2]:

$$E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - k^2 sin^2\varphi)}d\varphi, \quad K(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}}$$

su funkcije parametra $k : 0 < k < 1$ i vezani su sa $\frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k}$

- Nekad nam mogu pomoći da izračunamo i sami integral

$$F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)d\varphi, \ (\alpha > 1)$$

[2]Pojavljuju se u klasičnoj mehanici, savremenoj fizici, povezani su eliptičkim funkcijama i krivima koje su bitne u teoriji brojeva i kriptografiji

Slučaj kada i granice zavise od parametra

Razmotrimo sada slučaj kada i granice od $\mathcal{I}(y)$ zavise od y:

Slučaj kada i granice zavise od parametra

Razmotrimo sada slučaj kada i granice od $\mathcal{I}(y)$ zavise od y:

$$\mathfrak{I}(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$

U ovom slučaju zanimaće nas samo pitanja neprekidnosti i diferencijabilnosti.

Slučaj kada i granice zavise od parametra

Razmotrimo sada slučaj kada i granice od $\mathcal{I}(y)$ zavise od y:

$$\mathfrak{I}(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$

U ovom slučaju zanimaće nas samo pitanja neprekidnosti i diferencijabilnosti.

Napomena: U nastavku, kao i do sad $P := [a,b] \times [c,d]$.

Neprekidnost i diferencijabilnost, granice zavise od y

Propozicija

Neka f definisana i neprekidna na P, i neka su $\varphi(y), \psi(y)$ neprekidne krive i neka uzimaju vrijednosti unutar $[a, b]$ za svako $y \in [c, d]$ (tj. grafici im ne izlaze van P). Tada je integral $\mathfrak{I}(y)$ neprekidna funkcija na $[c, d]$.

Neprekidnost i diferencijabilnost, granice zavise od y

Propozicija

Neka f definisana i neprekidna na P, i neka su $\varphi(y), \psi(y)$ neprekidne krive i neka uzimaju vrijednosti unutar $[a,b]$ za svako $y \in [c,d]$ (tj. grafici im ne izlaze van P). Tada je integral $\mathfrak{I}(y)$ neprekidna funkcija na $[c,d]$.

Teorem

Neka vrijede iste pretpostavke kao u prethodnoj propoziciji. Dodatno, neka postoji i neka je neprekidan $f'_y(x,y)$ na P. Neka postoje izvodi φ', ψ'. Tada integral $\mathfrak{I}(y)$ ima izvod i vrijedi

$$\mathfrak{I}'(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx + \psi'(y)f(\psi(y),y) - \varphi'(y)f(\varphi(y),y)$$

Neprekidnost i diferencijabilnost, granice zavise od y

Propozicija

Neka f definisana i neprekidna na P, i neka su $\varphi(y), \psi(y)$ neprekidne krive i neka uzimaju vrijednosti unutar $[a,b]$ za svako $y \in [c,d]$ (tj. grafici im ne izlaze van P). Tada je integral $\mathfrak{I}(y)$ neprekidna funkcija na $[c,d]$.

Teorem

Neka vrijede iste pretpostavke kao u prethodnoj propoziciji. Dodatno, neka postoji i neka je neprekidan $f'_y(x,y)$ na P. Neka postoje izvodi φ', ψ'. Tada integral $\mathfrak{I}(y)$ ima izvod i vrijedi

$$\mathfrak{I}'(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx + \psi'(y)f(\psi(y),y) - \varphi'(y)f(\varphi(y),y)$$

Primjer: $F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$

Integracija integrala koji zavise od parametra

Vratimo se na slučaj kada granice $\mathcal{I}(y)$ ne zavise od parametra.

Vratimo se na slučaj kada granice $\mathcal{I}(y)$ ne zavise od parametra.

Slična pitanja možemo postaviti oko integracije $\mathcal{I}(y)$:

Integracija integrala koji zavise od parametra

Vratimo se na slučaj kada granice $\mathcal{I}(y)$ ne zavise od parametra.

Slična pitanja možemo postaviti oko integracije $\mathcal{I}(y)$:

- Kada možemo integrirati $\mathcal{I}(y)$ po y?

Integracija integrala koji zavise od parametra

Vratimo se na slučaj kada granice $\mathcal{I}(y)$ ne zavise od parametra.

Slična pitanja možemo postaviti oko integracije $\mathcal{I}(y)$:

- Kada možemo integrirati $\mathcal{I}(y)$ po y?
- Kada će vrijedti

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)dydx$$

  tj. kada integrali mogu zamijeniti mjesta?

Teorem o integraciji pod integralom

Sljedeći teorem nam daje dovoljne uslove za integraciju u ovom kontekstu.

Teorem o integraciji pod integralom

Sljedeći teorem nam daje dovoljne uslove za integraciju u ovom kontekstu.

Teorem

Ako $f(x,y)$ neprekidna[a] na $P = [a,b] \times [c,d]$, onda je $\mathcal{I}(y)$ integrabilna na $[c,d]$ i vrijedi

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Teorem o integraciji pod integralom

Sljedeći teorem nam daje dovoljne uslove za integraciju u ovom kontekstu.

Teorem

Ako $f(x,y)$ neprekidna[a] na $P = [a,b] \times [c,d]$, onda je $\mathcal{I}(y)$ integrabilna na $[c,d]$ i vrijedi

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

[a] kao funkcija dvije varijable

Fubini ovo rješava odmah, ali nam ne treba!

Teorem o integraciji pod integralom

Sljedeći teorem nam daje dovoljne uslove za integraciju u ovom kontekstu.

Teorem

Ako $f(x,y)$ neprekidna[a] na $P = [a,b] \times [c,d]$, onda je $\mathcal{I}(y)$ integrabilna na $[c,d]$ i vrijedi

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

[a] kao funkcija dvije varijable

Fubini ovo rješava odmah, ali nam ne treba!

Ako vrijedi posljednja jednakost u teoremu iznad, onda kažemo da $\mathcal{I}(y)$ možemo integrirati po parametru pod znakom integrala (po promjenljivoj x).

Poopštenja

Poopštenja

- $\mathcal{I}(y) = \int_a^b f(x,y)g(x)dx$. Kada g zadovoljava potrebne uslove, rezultati koje smo vidjeli se prirodno generaliziraju

Poopštenja

- $\mathcal{I}(y) = \int_a^b f(x,y)g(x)dx$. Kada g zadovoljava potrebne uslove, rezultati koje smo vidjeli se prirodno generaliziraju
- Nesvojsteni slučaj

Poopštenja

- $\mathcal{I}(y) = \int_a^b f(x,y)g(x)dx$. Kada g zadovoljava potrebne uslove, rezultati koje smo vidjeli se prirodno generaliziraju
- Nesvojsteni slučaj
- Višestruki integrali (svojstveni i nesvojstveni)

Hvala na pažnji :)